# INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XX. BAND FÜNFTES HEFT 1952

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

*Preis DM 10,80*

Das

# INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor K. v. Sanden, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. F. Schleicher, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Braunschweig, Harzburger Straße 8a
Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Vertriebsvertretung im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2

## Inhalt:

Seite

*Pflüger, A.*, Zur plastischen Knickung gerader Stäbe. Mit 11 Textabbildungen. 291

*Liu, Hsien-Chih*, Eigenschwingungen idealer Flüssigkeiten in Rohrleitungen mit verschiedenen Endquerschnitten. Mit 6 Textabbildungen ..... 302

*Liu, Hsien-Chih*, Über Schwingungen einer idealen Flüssigkeit in ellipsen- und kreisbogenförmigen, kommunizierenden Röhren. Mit 5 Textabbildungen .. 309

*Weidenhammer, F.*, Nichtlineare Biegeschwingungen des axialpulsierend belasteten Stabes. Mit 2 Textabbildungen ..... 315

*Wittmeyer, H.*, Ein einfaches Verfahren zur näherungsweisen Berechnung sämtlicher Torsionseigenfrequenzen eines Stabes veränderlichen Querschnitts. Mit 2 Textabbildungen ..... 331

*Stückler, B.*, Über die Differentialgleichungen für die Bewegung eines idealisierten Kraftwagens. Mit 10 Textabbildungen ..... 337

*Zerna, W.*, Zur Berechnung der Randstörungen kreiszylindrischer Tonnenschalen. Mit 3 Textabbildungen ..... 357

INGENIEUR-ARCHIV

XX. BAND FÜNFTES HEFT 1952

# Zur plastischen Knickung gerader Stäbe.

Von A. Pflüger.

**1. Einleitung.** Von *Shanley* wurde erstmalig 1946 darauf hingewiesen [1], daß die bekannte *Engesser-Kármán*sche Theorie der plastischen Knickung, die bereits um die Jahrhundertwende entwickelt und seitdem stets als einwandfrei angesehen wurde, doch einer wesentlichen Ergänzung bedarf. Es ist das Verdienst von *Schleicher*, in Deutschland die Arbeiten von *Shanley* bekannt gemacht zu haben [2].

*Shanley* gewinnt seine Erkenntnisse vorwiegend durch anschauliche Betrachtungen, die er an Hand von Versuchsergebnissen anstellt. Rechnerisch werden die Verhältnisse lediglich an einem sehr einfachen Modell verfolgt, das aus einem beiderseits gelenkig gelagerten Knickstab besteht, der in Stabmitte ein elastisches Gelenk hat und im übrigen vollkommen biegestarr ist. Es bleibt danach die Frage offen, wie die Lösung des Problems in allgemeineren Fällen im einzelnen aussieht. Diese Frage erscheint um so wichtiger, als die Ausführungen von *Shanley* bzw. *Schleicher* bereits angefochten worden sind [3]. Im folgenden soll die vollständige exakte Lösung für den Knickstab konstanten Querschnitts entwickelt und für zwei Sonderfälle, nämlich für den Rechteckquerschnitt und den „Zweipunktquerschnitt", zahlenmäßig ausgewertet werden. Dabei wird sich ergeben — um ein wichtiges Resultat der folgenden Betrachtungen vorweg zu nehmen — daß es sich nicht darum handelt, irgendwelche neuen Hypothesen mechanischer Art gegenüber der alten Theorie von *Engesser-Kármán* einzuführen, sondern einfach darum, das Problem mathematisch vollständig zu beschreiben und bisher vergessene Lösungen zu der seit langem bekannten hinzu zu nehmen.

**2. Einzelheiten der Aufgabenstellung. Voraussetzungen.** Nach Abb.1 sei ein beiderseits gelenkig gelagerter Knickstab mit der Koordinate $x$ längs der Stabachse, der Durchbiegung $w$, der Stablänge $l$ und der Belastung $P$ betrachtet.

Die Querschnittsform sei für alle $x$ konstant. Es sei nur das „*Euler*knicken" in der Zeichenebene, aber kein Biegedrehknicken untersucht. Für den Querschnitt möge gelten (vgl. Abb. 2):

$z$ Koordinate vom Schwerpunkt $S$ aus gerechnet,
$c$ $z$-Koordinate der untersten Faser,
$F$ Fläche und
$J$ Trägheitsmoment in Bezug auf die beim Knicken in Betracht kommende Querschnittshauptachse.

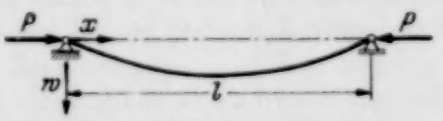

Abb. 1. Skizze des Knickstabes.

Zur Erläuterung der beim Knicken im plastischen Bereich für das Spannungs-Dehnungsdiagramm zu treffenden Annahmen diene zunächst Abb. 3a, in der für einen beliebigen Abstand $z$ die dort herrschende Druckspannung $-\sigma_z$ in Abhängigkeit von der Stauchung $-\varepsilon_z$ dargestellt ist. Bei einer Laststeigerung in irgendeinem Punkte $A$ des Diagramms kommt die stark ausgezogene Kurve mit der Neigung $E'$ in Betracht, bei einer Entlastung die gestrichelt eingezeichnete Gerade, die der Tangente im Nullpunkt parallel ist und die Neigung $E$ hat. Wird weiter die bei der Lösung von Verzweigungsproblemen übliche und im allgemeinen berechtigte Annahme hinzugenommen, daß die Verformung des Grundzustandes, d. h. die Zusammendrückung des geraden Stabes, vernachlässigt werden und das genaue Spannungs-Dehnungsdiagramm im Verzweigungspunkt durch seine Tangente ersetzt werden darf, so ergibt sich der in Abb. 3b dargestellte Zusammenhang. $\sigma_0$ ist dabei die Spannung des Grundzustandes, während $\varepsilon_z$ nunmehr die beim Knicken zusätzlich auftretende Dehnung bedeutet. Die durch Abb. 3b gekennzeichnete Abhängigkeit gibt die gewöhnlichen Annahmen der *Engesser-Kármán*schen Theorie wieder und

---

[1] *F. R. Shanley*, J. aeronaut. Sci. 13 (1946), S. 678 und 14 (1947), S. 261; Proc. Amer. Soc. Civil Engr. 75 (1949), S. 759.

[2] *F. Schleicher*, Bau-Ing. 26 (1951), S. 139 und S. 197; Abhandlungen aus dem Stahlbau, Heft 10 (1951), S. 118.

[3] *W. Cornelius*, Bau-Ing. 26 (1951), S. 255.

wird für das folgende als exakt gültig vorausgesetzt. Unbefriedigend bleibt bei diesem Ansatz, daß er weder die Krümmung des Spannungs-Dehnungsdiagramms, noch die sich bei wiederholter Be- und Entlastung ergebenden Verhältnisse zu erfassen gestattet. Dem wirklichen Werkstoffverhalten wird also die Rechnung nur für hinreichend kleine Verformungen gerecht. Bei plastischen Verformungen entsteht im Querschnitt ein Belastungs- und ein Entlastungsbereich. Diese Bereiche mögen nach Abb. 2 die Flächen $F_1$ und $F_2$ haben und seien durch die Grenzlinie $z = c - s$ von einander getrennt.

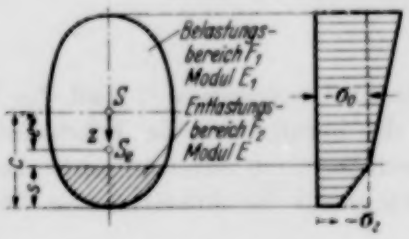


Abb. 2. Querschnitt mit Spannungsverteilung.

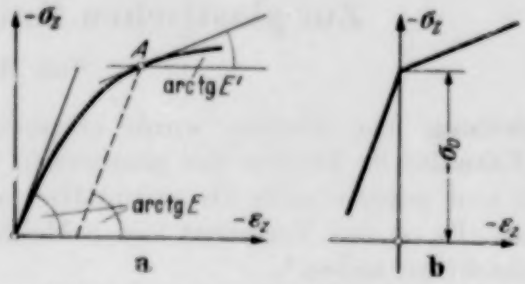


Abb. 3a, b. Spannungs-Dehnungsdiagramme.

**3. Ableitung der Differentialgleichungen.** Wird zur Abkürzung

$$\frac{E}{E'} = n \tag{1}$$

gesetzt, so lauten die Voraussetzungen von Abb. 3b

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_0 + E'\,\varepsilon_z \quad \text{für} \quad \varepsilon_z \leq 0\,, \\ \sigma_z &= \sigma_0 + n\,E'\,\varepsilon_z \quad \text{„} \quad \varepsilon_z \geq 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{2 a, b}$$

Durch Integration der Spannungen bzw. Spannungsmomente über den Querschnitt ergeben sich in bekannter Weise Längskraft und Biegemomente. Dabei ist es zweckmäßig — abweichend von *Shanley* — so vorzugehen, wie es in der Statik des Stahlbetonbaus üblich ist. Hierdurch wird der mechanische Sinn der Ansätze besonders deutlich. Dementsprechend sei einheitlich mit dem Modul $E'$ gerechnet und der Entlastungsbereich für den beim Knicken zusätzlich auftretenden Spannungs- und Verformungszustand als $n$-fach wirkende Fläche angesetzt. Dazu seien folgende Größen eingeführt:

$$\left.\begin{aligned} F_e &= F_1 + n\,F_2\,, \\ e &= \frac{1}{F_e}\left(\int\limits_{(F_1)} z\,dF + n\int\limits_{(F_2)} z\,dF\right), \\ J_e &= \int\limits_{(F_1)} (z-e)^2\,dF + n\int\limits_{(F_2)} (z-e)^2\,dF\,. \end{aligned}\right\} \tag{3 a, b, c}$$

$F_e$ ist die „ideelle" Fläche, $J_e$ das ideelle Trägheitsmoment und $e$ die Koordinate des Schwerpunkts $S_e$ der Fläche $F_e$ (vgl. Abb. 2). Ferner sei

$\varepsilon_e$ Dehnung bei $z = e$, gemessen vom Grundzustand aus,

$N$ Längskraft,

$M_e$ Biegemoment in Bezug auf die Hauptachse $z = e$ des ideellen Querschnitts.

Die Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte läßt sich in der Form

$$\varepsilon_z = \varepsilon_e - (z-e)\frac{d^2w}{dx^2} \tag{4}$$

schreiben. Mit (2), (3) und (4) und unter Beachtung der Tatsache, daß das statische Moment der ideellen Querschnittsfläche $F_e$ für die Achse $z = e$ und das der wirklichen Fläche $F$ für die Achse $z = 0$ verschwindet, ergibt sich dann für die Längskraft

$$N = \int\limits_{(F)} \sigma_z\,dF = \int\limits_{(F_1)} \left[\sigma_0 + E'\,\varepsilon_e - E'\,(z-e)\frac{d^2w}{dx^2}\right] dF + \int\limits_{(F_2)} \left[\sigma_0 + n\,E'\,\varepsilon_e - n\,E'\,(z-e)\frac{d^2w}{dx^2}\right] dF$$
$$= \sigma_0 F + E'\,F_e\,\varepsilon_e$$

und entsprechend für das Biegemoment

$$M_e = -\sigma_0 F\,e - E'\,J_e\frac{d^2w}{dx^2}\,.$$

Mit $\sigma_0 F = N_0$ erhält man also für die Schnittgrößen das Elastizitätsgesetz

$$\left.\begin{aligned} N &= N_0 + E' F_e \varepsilon_e , \\ M_e &= - N_0 e - E' J_e \frac{d^2 w}{dx^2} , \end{aligned}\right\} \qquad (5\,\text{a, b})$$

das in seiner Anschaulichkeit keiner weiteren Erläuterung bedarf. Befinden sich alle Fasern eines Stabes ausschließlich im Belastungsbereich, so ist $e = 0$, $F_e = F$ und $J_e = J$.

Die Differentialgleichungen des Problems ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen, die bei Beschränkung auf lineare Glieder der beim Knicken auftretenden Zusatzverformungen die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} N &= -P , \\ M_e &= P(e + w) \end{aligned}\right\} \qquad (6\,\text{a, b})$$

haben. Im Grundzustand sei $P = P_0$; es wird also

$$N_0 = -P_0 . \qquad (7)$$

Mit (6) und (7) und der Abkürzung

$$\Delta P = P - P_0 \qquad (8)$$

folgen aus (5) die gesuchten Differentialgleichungen zu

$$\left.\begin{aligned} E' F_e \varepsilon_e + \Delta P &= 0 , \\ E' J_e \frac{d^2 w}{dx^2} + P w + \Delta P e &= 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (9\,\text{a, b})$$

Für ein Stabelement, dessen sämtliche Fasern sich ausschließlich im Belastungsbereich befinden, wird aus (9)

$$\left.\begin{aligned} E' F \varepsilon^* + \Delta P &= 0 , \\ E' J \frac{d^2 w^*}{dx^2} + P w^* &= 0 , \end{aligned}\right\} \qquad (9^*\,\text{a, b})$$

wenn zum Unterschied gegenüber dem durch (9) gekennzeichneten allgemeinen Fall die Dehnung der Stabachse mit $\varepsilon^*$ und die Durchbiegung mit $w^*$ bezeichnet wird. Die Differentialgleichungen (9) und (9*) gelten auch noch für beliebig veränderlichen Querschnitt.

**4. Lösung der Differentialgleichungen.** a) Die *Engesser-Kármán*sche Lösung. Bei Betrachtung der Differentialgleichungen (9) fällt sofort auf, daß es sich — wenigstens zunächst — garnicht um ein Eigenwertproblem handelt, sondern wegen der Exzentrizität $e$, die das Störungsglied $\Delta P e$ verursacht, um ein inhomogenes Knickbiegungsproblem. Es sei jedoch betont, daß diese Tatsache zwar durch die gewählte Darstellung, bei der das Biegemoment auf den Schwerpunkt $S_e$ der ideellen Fläche bezogen ist, besonders deutlich wird, aber nicht etwa durch irgendwelche neuartigen Annahmen zustande kommt; die bisherige Rechnung ist vielmehr nichts anderes als eine Wiederholung der üblichen Ansätze von *Engesser-Kármán* in einer für das Weitere geeigneten Form.

Die altbekannte Lösung des Knickproblems ergibt sich nun, wie folgt. Die Gleichungen (9*) zeigen zunächst, daß keine Lösung existiert, bei der sich alle Querschnitte im Belastungsbereich befinden. Aus der homogenen Gleichung (9* b) entnimmt man nämlich, daß es sich um ein Eigenwertproblem mit bestimmten Werten $P = P_0$ handelt, daß also eine Laststeigerung über diese Werte hinaus bei ausgebogenem Stab unmöglich ist und infolgedessen in (9* a) die Laststeigerung $\Delta P = 0$ zu setzen ist. Für einen Stab, der zusätzlich zum Grundzustand nur Biegemomente bekommt, ist aber die Bedingung $\varepsilon_z \leqq 0$ für sämtliche Punkte aller Querschnitte nicht erfüllbar. Es muß also das Vorhandensein von Entlastungsbereichen angenommen werden. Zu ihrer Berechnung seien vorerst die Randbedingungen näher betrachtet.

Die Voraussetzung eines festen Gelenklagers verlangt

$$\text{für } x = 0 \text{ und } x = l\text{: } w = 0, \quad M_{z=0} = 0 . \qquad (10\,\text{a, b})$$

Die Randbedingung (10 b) bedeutet, daß die Differentialgleichung (9 b), in der das Momentengleichgewicht zum Ausdruck kommt, an den Stabenden mit $w = 0$ erfüllt sein soll. Es muß also

$$\text{für } x = 0 \text{ und } x = l\text{: } E' J_e \frac{d^2 w}{dx^2} + \Delta P e = 0 \qquad (11)$$

gelten. Da an den Stabenden die Belastung nur aus einer Druckkraft im Querschnittsschwerpunkt S besteht, kann sich dort lediglich eine konstante Spannungsverteilung $\sigma = \frac{P}{F}$ einstellen, während die beim Ausbiegen des Stabes zusätzlich auftretenden Biegemomente $-E' J_e \frac{d^2w}{dx^2}$ verschwinden müssen. (11) zerfällt also in die beiden Forderungen

$$\text{für } x = 0 \quad \text{und} \quad x = l\text{:} \quad E' J_e \frac{d^2w}{dx^2} = 0\,, \qquad \Delta P\, e = 0\,. \tag{12 a, b}$$

Für das Folgende ist vor allem (12 b) von Bedeutung.

Da eine Lösung gesucht wird, bei der die Stabquerschnitte Entlastungsbereiche haben, liegt es nahe, an den Auflagern $e \neq 0$ zu verlangen, so daß dann $\Delta P = 0$ folgt. Hiermit wird aber aus (9b) das *Engesser-Kármán*sche Eigenwertproblem mit den Eigenwerten $P_0$, deren niedrigster mit

$$\bar{P}_K = \pi^2 \frac{E' \bar{J}_e}{l^2} \tag{13}$$

bezeichnet sei. Das zugehörige Trägheitsmoment $\bar{J}_e$ folgt dabei wegen $\Delta P = 0$ in bekannter Weise aus der Bedingung, daß die Verteilung der zusätzlich beim Knicken auftretenden Spannungen auch wirklich nur ein reines Biegemoment liefert.

b) Vollständige Lösung. Wesentlich ist nun, daß die Forderung $e \neq 0$ für die Stabenden nicht die einzige ist, die zu einer Lösung des Problems führt. Die Forderung (12b) kann auch mit $e = 0$, $\Delta P \neq 0$ befriedigt werden, ohne daß damit Verformungen des Stabes im Entlastungsbereich völlig ausgeschlossen sind. Wie solche Lösungen zustande kommen können, möge zunächst folgende anschauliche Überlegung zeigen.

Bei hinreichend kleinen Lasten kommt nur die Gleichgewichtslage des gestreckten Stabes in Betracht, wobei sich alle Querschnitte vollständig im Belastungsbereich befinden. Mit beginnender Auslenkung stellt sich ein Biegemoment ein, das in der Stabmitte seinen Größtwert hat und nach den Stabenden hin auf Null abnimmt. Es ist danach zu erwarten, daß sich der durch das Biegemoment erzwungene Entlastungsbereich auch zunächst nur in der Stabmitte ausbildet und dann erst mit steigender Belastung nach den Seiten hin ausbreitet. Die ganze Stablänge wird sich also im allgemeinen nach Abb. 4 in einen „Entlastungsabschnitt", der die Länge $a$ haben möge, und zwei „Belastungsabschnitte" unterteilen. Die Dicke $s$ des Entlastungsbereiches wird in Stabmitte ihren Größtwert haben und nach irgend einem zunächst unbekannten Gesetz bis zum Wert Null an der Grenze zwischen dem Entlastungs- und Belastungsabschnitt abnehmen. An den Auflagern muß $e = 0$ sein. Da jedoch im Entlastungsabschnitt $e \neq 0$ ist, wird sich der Stab unter Wirkung des Momentes $\Delta P e$ sofort durchbiegen, so daß ein Knickbiegungsproblem und kein Eigenwertproblem vorliegt.

Abb. 4. Knickstab mit Entlastungsbereich.

Das geschilderte Verhalten des Stabes wird durch die Rechnung voll bestätigt. Es seien zunächst die Belastungsabschnitte untersucht, wobei aus Symmetriegründen die Betrachtung eines Abschnitts genügt. Hierfür gelten die Differentialgleichungen (9*). Setzen wir konstanten Querschnitt voraus, so ist die allgemeine Lösung von (9*) mit den Integrationskonstanten $A$ und $B$

$$w^* = A \sin \sqrt{\frac{P}{E' J}}\, x + B \cos \sqrt{\frac{P}{E' J}}\, x\,.$$

Das Verschwinden der Durchbiegung bei $x = 0$ verlangt $B = 0$, so daß

$$w^* = A \sin \sqrt{\frac{P}{E' J}}\, x \tag{14}$$

übrig bleibt.

Zur Ermittlung der Durchbiegung im Entlastungsabschnitt wird noch folgende geometrische Beziehung gebraucht, die sich aus Gleichung (4) herleiten läßt. Nach Definition wird für $z = c - s$ die Dehnung $\varepsilon_z = 0$; es ist also

$$0 = \varepsilon_e - (c - e - s) \frac{d^2w}{dx^2}\,.$$

Setzt man für $\varepsilon_e$ den Wert von (9a) ein, so wird

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{\Delta P}{E' F_e} \frac{1}{c - e - s} . \tag{15}$$

Durch (15) und (9b) wird das im folgenden zu lösende Problem beschrieben. Differenziert man (9b) zweimal nach $x$ und eliminiert mit Hilfe von (15) $d^2w/dx^2$, so erhält man eine Differentialgleichung vierter Ordnung für $s$. Sie ist nichtlinear, da $s$ in (15) im Nenner vorkommt und $e$, $F_e$ und $J_e$ irgendwelche durch die Querschnittsform gegebenen Funktionen von $s$ sind. Trotzdem ist es glücklicherweise möglich, auch für beliebige Querschnittsgestalt die Lösung auf folgende Weise zu gewinnen.

Aus (9b) folgt unter Benutzung von (15)

$$\frac{P}{\Delta P} w = \frac{J_e}{F_e} \frac{1}{c - e - s} - e .$$

Werden die dimensionslosen Größen

$$\psi = \frac{s}{c} , \quad \eta = \frac{e}{c} , \quad i_e = \sqrt{\frac{J_e}{F_e c^2}} , \quad \varphi = \frac{P}{\Delta P} \frac{w}{c} \tag{16 a—d}$$

eingeführt, so wird

$$\varphi = \frac{i_e^2}{1 - \eta - \psi} - \eta \tag{17}$$

und aus (15)

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{\Delta P}{E' F c} \frac{F}{F_e} \frac{1}{1 - \eta - \psi} .$$

Multipliziert man die linke Seite dieser Gleichung mit $dw/dx$, die rechte nach (16d) mit

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\Delta P}{P} c \frac{d\varphi}{dx}$$

und integriert, so folgt

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = -\frac{\Delta P^2}{P E' F} \int \frac{F}{F_e} \frac{1}{1 - \eta - \psi} d\varphi + C .$$

Zur Festlegung der Integrationskonstanten $C$ dient die Bedingung, daß in Stabmitte $dw/dx = 0$ sein muß. Der an dieser Stelle vorhandene Wert von $\varphi$ sei $\varphi_m$; bei $\psi = 0$ sei $\varphi = \varphi_0$. Es wird dann

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = \frac{\Delta P^2}{P E' F} \left( \int_{\varphi_0}^{\varphi_m} \frac{F}{F_e} \frac{1}{1 - \eta - \psi} d\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{F}{F_e} \frac{1}{1 - \eta - \psi} d\varphi \right) .$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\Phi = \sqrt{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{F}{F_e} \frac{1}{1 - \eta - \psi} d\varphi} , \qquad \Phi_m = \sqrt{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_m} \frac{F}{F_e} \frac{1}{1 - \eta - \psi} d\varphi} , \tag{18 a, b}$$

so folgt

$$\frac{dw}{dx} = \sqrt{\frac{\Delta P^2}{P E' F}} \sqrt{\Phi_m^2 - \Phi^2} . \tag{19}$$

Differenziert man (16d) nach $x$, so ergibt sich

$$dx = \frac{\Delta P}{P} \frac{c}{\frac{dw}{dx}} d\varphi$$

und mit (19) nach Integration

$$x = \frac{l - a}{2} + c \sqrt{\frac{E' F}{P}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{\Phi_m^2 - \Phi^2}} d\varphi . \tag{20}$$

Die Integrationskonstante ist dabei gleich $\frac{1}{2}(l - a)$ gesetzt, da $x$ diesen Wert bei $\varphi = \varphi_0$, d. h.

an der Übergangsstelle zwischen Belastungs- und Entlastungsbereich annehmen muß. Das in (20) vorkommende Integral sei zur Abkürzung mit $\Phi_m\,\Theta$ bezeichnet und die neue Veränderliche

$$\vartheta = \arcsin\frac{\Phi}{\Phi_m} \tag{21}$$

eingeführt, wobei $\vartheta$ als Hauptwert des arc sin definiert sei. Beachtet man, daß nach (18a) und (21) $\vartheta$ bei $\varphi = \varphi_0$ verschwindet, so wird

$$\Phi_m\,\Theta = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{\Phi_m^2 - \Phi^2}}\,d\varphi = \int_0^{\vartheta} \frac{1}{\Phi_m}\,\frac{1}{\cos\vartheta}\,\frac{d\varphi}{d\vartheta}\,d\vartheta\,,$$

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{1}{\Phi_m\cos\vartheta}\,\frac{d\Phi}{d\varphi} = \frac{\dfrac{F}{F_e}\,\dfrac{1}{1-\eta-\varphi}}{\Phi_m^2\sin\vartheta\cos\vartheta}$$

$$\Theta = \int_0^{\vartheta} \frac{F_e}{F}\,(1-\eta-\varphi)\sin\vartheta\,d\vartheta \tag{22}$$

und damit aus (20)

$$x = \frac{l-a}{2} + c\sqrt{\frac{E'F}{P}}\,\Phi_m\,\Theta\,. \tag{23}$$

Aus der Bedingung, daß bei $x = \dfrac{l}{2}$, d. h. in Stabmitte, $\varphi = \varphi_m$, $\Phi = \Phi_m$ und nach (21) $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ ist, folgt mit

$$\Theta_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F_e}{F}\,(1-\eta-\varphi)\sin\vartheta\,d\vartheta \tag{24}$$

aus (23)

$$\frac{a}{2} = c\sqrt{\frac{E'F}{P}}\,\Phi_m\,\Theta_m\,. \tag{25}$$

Durch die Einführung von $\vartheta$ ergibt sich zwanglos, daß das Integral $\Phi_m\,\Theta_m$, das in der Darstellungsform der Gleichung (20) wegen der Integration bis $\Phi = \Phi_m$ uneigentlich ist, einen endlichen Wert hat. Die Benutzung von $\vartheta$ erweist sich außerdem für numerische Rechnungen als sehr zweckmäßig. Durch Aufstellung der Gleichungen (19) und (20) ist die Integration der Differentialgleichungen (9b) und (15) auf Quadraturen zurückgeführt und damit im Prinzip erledigt.

Als nächstes sind die Übergangsbedingungen zwischen Entlastungs- und Belastungsabschnitt zu betrachten. An dieser Stelle müssen die Durchbiegungen und ihre Ableitungen übereinstimmen, d. h. es muß gelten

$$\text{für}\quad x = \frac{l-a}{2}:\quad w^* = w\,,\qquad \frac{dw^*}{dx} = \frac{dw}{dx}\,. \tag{26 a, b}$$

$w^*$ und $\dfrac{dw^*}{dw}$ folgen aus (14); $w$ und $\dfrac{dw}{dx}$ ergeben sich aus (16d), (17) und (19). Dabei ist zu setzen

$$\psi = 0,\quad \eta = 0\,,\quad F_e = F\,,\quad J_e = J\,,\quad i_e^2 = \frac{J}{F\,c^2} = i^2\,,\quad \varphi = \varphi_0 = i^2\,,\quad \Phi = 0\,.$$

Man erhält dann

$$A\sin\sqrt{\frac{P}{E'J}}\,\frac{l-a}{2} = \frac{\Delta P}{P}\,c\,i^2\,,\qquad A\sqrt{\frac{P}{E'J}}\cos\sqrt{\frac{P}{E'J}}\,\frac{l-a}{2} = \sqrt{\frac{\Delta P^2}{P\,E'F}}\,\Phi_m\,.$$

Nach Elimination von $A$ folgt

$$\frac{1}{i}\,\Phi_m\,\mathrm{tg}\sqrt{\frac{P}{E'J}}\,\frac{l-a}{2} = 1\,. \tag{27}$$

Mit der abkürzenden Bezeichnung

$$P_k = \pi^2\,\frac{E'J}{l^2} \tag{28}$$

ergibt sich unter Benutzung von (25)

$$\frac{1}{i}\,\Phi_m \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_K}}-\frac{1}{i}\,\Phi_m\,\Theta_m\right)=1\,. \tag{29}$$

**5. Diskussion der Lösung am Beispiel des Rechteckquerschnittes.** Eine Diskussion der in den obigen Formeln enthaltenen Lösung erfolgt am zweckmäßigsten an Hand eines Beispiels. Hierzu sei der Stab mit Rechteckquerschnitt gewählt. Für diese Querschnittsform ergeben sich nach elementarer Rechnung die dimensionslosen Ausgangsgrößen zu

$$\left.\begin{aligned}
\eta &= \frac{n-1}{2}\,\frac{(2-\psi)\,\psi}{2+(n-1)\,\psi}\,,\\
\frac{F_e}{F} &= 1+\frac{n-1}{2}\,\psi\,,\\
i_e^2 &= \frac{1}{6}\,\frac{F}{F_e}\,\{(n-1)\,\psi\,(\psi^2-3\,\psi+3)-3\,\eta^2\,[2+(n-1)\,\psi]+2\}\,,\\
i^2 &= \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{30 a—d}$$

Im folgenden ist $c$ die halbe Höhe des Rechtecks. Es ist bemerkenswert, daß diese Ausgangsgrößen und damit auch, wie sich zeigen wird, die Ergebnisse der weiteren Rechnung unabhängig vom Seitenverhältnis des Rechtecks sind.

Die Lösung der Aufgabe, den Verformungszustand des Stabes in Abhängigkeit von der Belastung darzustellen, wird durch die Gleichungen (16d), (23) und (29) geliefert. Gibt man $\psi$ als unabhängige Veränderliche vor, so erhält man aus (16d) nach Berechnung von $\varphi$ die Durchbiegung $w$ und aus (23) nach Ermittlung von $\Phi_m$ und $\Theta$ die zugehörige Koordinate $x$, wenn die Parameter $\psi_m$, $P$ und $\Delta P = P - P_0$ gegeben sind. Zwischen diesen letztgenannten Größen besteht die transzendente Übergangsbedingung (29), so daß damit noch eine Größe, etwa $\psi_m$ festgelegt ist. Zwei Parameter, z. B. $P$ und $P_0$, sind aber noch frei wählbar. Stellt man die Belastung $P$ in Abhängigkeit von der Verformung in Stabmitte dar, so erhält man also eine ganze Kurvenschar mit $P_0$ als Parameter. Diese Rechnung läßt sich leider für den Rechteckquerschnitt nicht in geschlossener Form durchführen. Da es sich jedoch um einfache Quadraturen handelt, können diese ohne Schwierigkeiten — und dasselbe gilt auch für andere Querschnittsformen — numerisch durchgeführt werden. Das Ergebnis ist in den Abb. 5 bis 9 dargestellt.

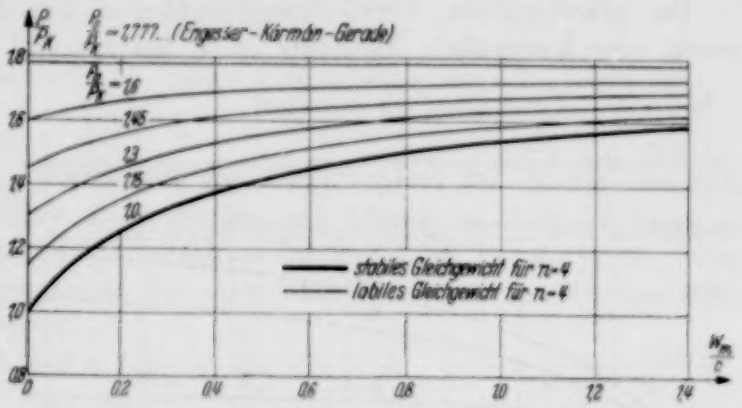


Abb. 5. $P/P_K$ in Abhängigkeit von $w_m/c$ mit $P_0/P_K$ als Parameter für $n = 4$. Rechteckquerschnitt.

Abb. 5 zeigt zunächst für den willkürlich gewählten Wert $n = 4$ die Kurvenschar $P/P_K$ in Abhängigkeit von $w_m/c$ mit $P_0/P_K$ als Parameter, wobei $w_m$ die Durchbiegung in Stabmitte ist. Die Kurven beginnen bei $w = 0$ mit den verschiedenen Werten $P = P_0$ und erfüllen den Bereich zwischen der stark ausgezogenen untersten Kurve und der horizontalen Geraden. Diese Gerade ist die *Engesser-Kármán*sche Lösung des Problems, da hierbei $\Delta P = 0$ ist, so daß Gleichung (9b) mit der Lösung (13) gilt. Beim Rechteckquerschnitt ist der bekannte *Engesser-Kármán*sche Eigenwert

$$\frac{\bar{P}_K}{P_K}=\frac{4\,n}{(1+\sqrt{n})^2}\,.$$

Die horizontale Gerade ist zugleich für alle Kurven Asymptote, die bei unendlich großen Durchbiegungen erreicht wird. Im Grenzfall ist die Länge $a$ des Entlastungsabschnittes gleich $l$. Mit $w = \infty$ muß nämlich nach (16d) auch $\varphi = \infty$ sein, was für $1 - \eta - \psi = 0$ eintritt, so daß nach (18) $\Phi_m = \infty$ und nach (27) $a = l$ folgt. Während sich bei der *Engesser-Kármán*schen Lösung der Entlastungsbereich sofort beim Beginn des Knickens über die ganze Länge erstreckt, fangen die übrigen Kurven bei $w_m = 0$ mit einem Wert $a$ an, der kleiner als $l$ und um so kürzer ist, je kleiner $P_0$ ist.

Besonders wichtig ist die stark ausgezogene untere Begrenzungskurve des Bereiches. Sie liefert nämlich die stabilen Gleichgewichtslagen des Stabes, da sie die niedrigsten Lasten $P$ kennzeichnet, die eine bestimmte Durchbiegung zu erzeugen vermögen. Alle übrigen Kurven, also auch die *Engesser-Kármán*sche Gerade, gehören zu labilen Gleichgewichtszuständen und sind damit praktisch von geringem Interesse. Die unterste Kurve beginnt mit $a = 0$ bei $P = P_K$. Für $a = 0$ wird nämlich $\varphi_m = \varphi_0$ und nach (18) $\Phi_m = 0$, so daß in der Tat aus (27)

$$\mathbf{O} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_K}} = 1 , \qquad P = P_K$$

folgt. Diese wichtige Aussage, die bereits von *Shanley* auf Grund anschaulicher Betrachtungen als allgemein gültige Tatsache ausgesprochen wurde, bedeutet also, daß die Ausbiegungen des Stabes gerade bei der Last anfangen, bei der auch „gewöhnliches *Euler*knicken" eintreten würde, wenn für den ganzen Stab, also auch im Entlastungsabschnitt, nur der Elastizitätsmodul $E'$ gelten würde.

Eine sehr einfache Beziehung gilt für die Tangentenneigung der niedrigsten Kraft-Verformungskurve von Abb. 5. Nach (16d) und (17) wird nämlich wegen $a = 0$

$$\text{für} \quad w_m = 0: \quad \frac{d\dfrac{P}{P_K}}{d\dfrac{w_m}{c}} = \frac{1}{i^2} . \tag{31}$$

Diese Beziehung [1] gilt ebenso wie alle bisherigen Aussagen über das grundsätzliche Verhalten der Kurven zu Abb. 5 für beliebige Querschnittsform. Der Kurvenverlauf für größere $\Delta P$ und auch die Tangenten der Kurven, die zu den labilen Gleichgewichtszuständen gehören, sind jedoch von der Querschnittsform abhängig.

Bei gewöhnlichen Verzweigungsproblemen hat die Kraft-Verformungskurve im Abzweigpunkt eine horizontale Tangente, d. h. bei ein und derselben Last sind verschiedene benachbarte Gleichgewichtslagen möglich. Man spricht in diesem Fall bekanntlich vom indifferenten Gleichgewicht, das in der Regel beim Übergang von stabilen zu labilen Gleichgewichtszuständen durchlaufen wird. Das vorliegende Problem ist durch die nach (31) von Null verschiedene Tangente als Ausnahme gekennzeichnet. Die Gleichgewichtslage des geraden Stabes wird bei $P = P_K$ unvermittelt labil, indifferentes Gleichgewicht tritt nicht auf. In „energetischer Ausdrucksweise" bedeutet dies, daß die zweite Variation der potentiellen Energie des geraden Stabes unterhalb des Abzweigpunktes positiv definit ist, im Abzweigpunkt jedoch sprunghaft negative Werte annehmen kann. Dieser Sprung wird durch die Unstetigkeit im Elastizitätsgesetz verursacht und ist für derartige Fälle typisch [2].

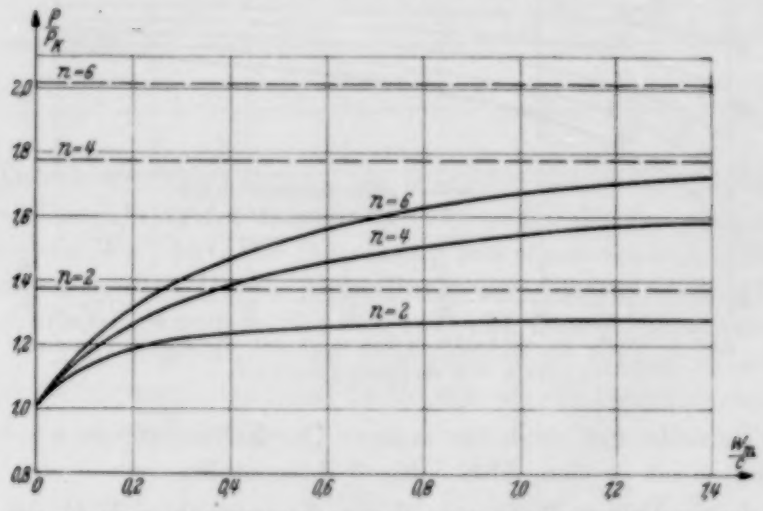


Abb. 6. $P/P_K$ in Abhängigkeit von $w_m/c$ mit $n$ als Parameter für stabile Gleichgewichtszustände. Rechteckquerschnitt.

Es muß noch erwähnt werden, daß außer der in Abb. 5 dargestellten Kurvenschar auch noch weitere solcher Scharen existieren, die zu den Knickmöglichkeiten des Stabes mit mehreren Halbwellen gehören und sich ergeben, wenn man in (29) statt $P_K$ die entsprechenden höheren Eigenwerte $m^2 \pi^2 E' J/l^2$ $(m = 2, 3, \ldots)$ einsetzt. Diese Kurven liefern jedoch sämtlich labile Gleichgewichtszustände und sind daher praktisch ohne Belang.

Zur weiteren Kennzeichnung der Zusammenhänge sind noch für verschiedene Werte des Verhältnisses $n$ in Abb. 6 die niedrigsten Kraft-Verformungskurven, in Abb. 7 die Abhängigkeit zwischen Belastung und Länge des Entlastungsabschnitts und in Abb. 8 die Abhängigkeit zwischen Belastung und größter Dicke des Entlastungsbereiches dargestellt. An der letztgenannten

[1] Die Tangentenneigung nach (31) ist bereits in der von *F. Schleicher*, Bau-Ing. 26 (1951), S. 140, entwickelten Näherungslösung des Problems enthalten.

[2] Vgl. *A. Pflüger*, Stabilitätsprobleme der Elastostatik, S. 66. Berlin 1951.

Kurvenschar ist vor allem bemerkenswert, daß der Entlastungsbereich um so größer ist, je kleiner $n$ ist. Eine anschauliche Zusammenfassung der wichtigsten Aussagen der Diagramme 5 bis 8 zeigt Abb.9, aus der für $n = 4$ die Zunahme und Ausbreitung des Entlastungsbereiches mit fortschreitender Verformung hervorgeht. Dazu sei noch einmal betont, daß die Rechnung wegen der grundlegenden Annahmen über das Spannungs-Dehnungsdiagramm nur für hinreichend kleine Verformungen das wirkliche Verhalten des Stabes wiedergibt.

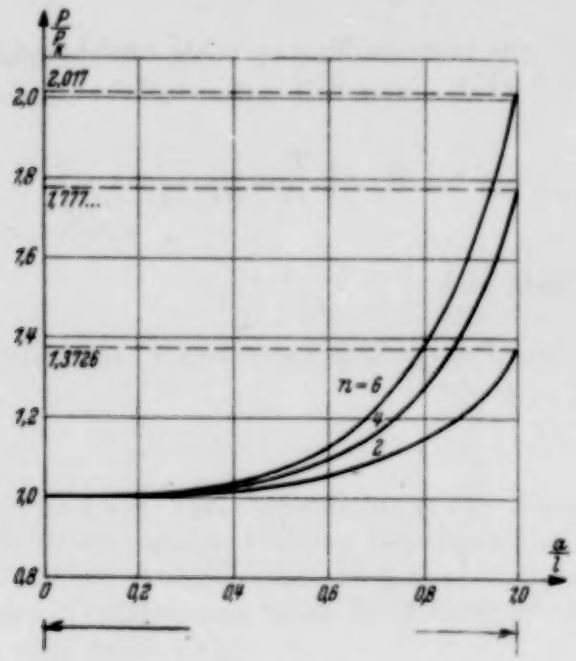


Abb. 7. $P/P_K$ in Abhängigkeit von $a/l$ mit $n$ als Parameter. Rechteckquerschnitt.

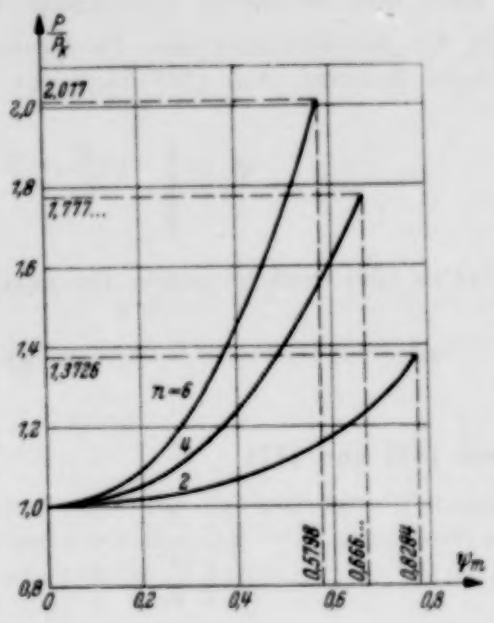


Abb. 8. $P/P_K$ in Abhängigkeit von $v_m$ mit $n$ als Parameter. Rechteckquerschnitt.

Nach der alten *Engesser-Kármán*schen Theorie galt die Tragfähigkeit des Stabes erst mit Erreichung des Wertes $P_K$ als erschöpft. Nach der vollständigen Lösung wird dieser Zustand schon früher erreicht, wenn auch nicht sofort bei Überschreitung der Last $P_K$, da ja der Stab auch für Werte $P > P_K$ noch Lasten tragen kann. Für eine Überschreitung von $P_K$ um 10% ergibt sich nämlich bei $n = 4$ eine Durchbiegung von etwa 2,5% der Querschnittshöhe für den Rechteckquerschnitt (nach Abb. 6) und von etwa 7% für den Zweipunktquerschnitt (nach Abb.10), was in der Regel noch zulässig sein wird. Auf die Erörterung weiterer Einzelheiten dieser und ähnlicher Fragen praktischer Bedeutung sei jedoch hier verzichtet, da dies bereits in den Arbeiten der in diesem Aufsatz genannten Autoren geschehen ist. Es sei nur die Ansicht des Verfassers betont, daß keine Veranlassung zu einer Änderung der für die Bemessung von Knickstäben festgelegten $\omega$-Werte besteht. Denn diese sind ja in Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen gewählt, in denen — wenn auch bisher unerkannt — der *Shanley*-Effekt enthalten ist. Der wesentliche Wert der neuen Theorie dürfte vielmehr in der Erkenntnis bestehen, daß das in Versuchen immer wieder festgestellte von einem Eigenwertproblem verschiedene Verhalten des Knickstabes nicht nur durch Vorverformungen und unbeabsichtigte Anfangsexzentrizitäten verursacht sein muß, sondern auch durch plastische Verformungen zustande kommen kann.

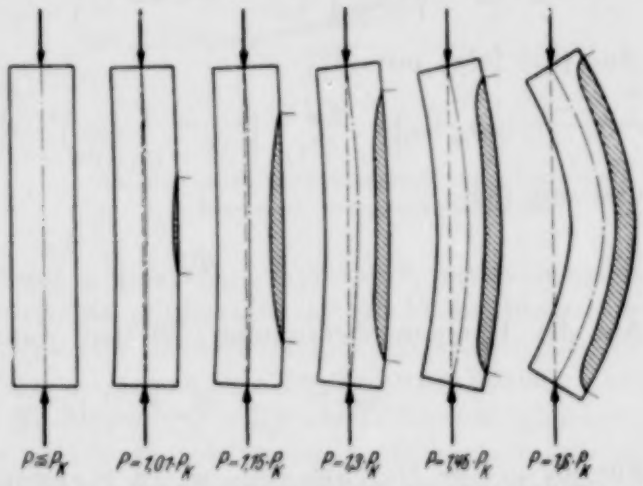


Abb. 9. Verformung und Entlastungsbereich in Abhängigkeit von der Belastung für stabile Gleichgewichtszustände. Rechteckquerschnitt; $n = 4$.

**6. Zweipunktquerschnitt.** Ein I-Querschnit kann bei kräftigen Flanschen und schwachem Steg näherungsweise durch einen Zweipunktquerschnitt ersetzt werden, bei dem die Querschnittsfläche in zwei Punkten konzentriert gedacht ist. Dieser Querschnitt sei hier noch kurz behandelt,

da sich in diesem Fall die erforderlichen Integrationen geschlossen durchführen lassen [1]. Wegen der z. T. zu einfachen Zusammenhänge ist allerdings der Zweipunktquerschnitt nicht so gut als Musterbeispiel geeignet wie der im vorigen Abschnitt behandelte Rechteckquerschnitt.

Für die Ausgangsgrößen gilt

$$\eta_j = \frac{n-1}{n+1}, \qquad \frac{F}{F_e} = \frac{2}{n+1}, \qquad i_e^2 = \frac{4n}{(n+1)^2}, \qquad i^2 = 1. \tag{32 a—d}$$

$c$ ist auch hier die halbe Querschnittshöhe.

Für die durchzuführenden Integrationen wird am zweckmäßigsten $\psi$ als unabhängige Veränderliche benutzt. Aus (18) folgt mit $d\varphi/d\psi$ nach (17)

$$\Phi = \sqrt{2\,\frac{F}{F_e}\,i_e^2 \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{(1-\eta-\psi)^3}}, \qquad \Phi = \sqrt{\frac{F}{F_e}\,i_e^2 \left[\frac{1}{(1-\eta-\psi)^2}\right]_0^{\psi}}. \tag{33}$$

Für das in (20) vorkommende Integral $\Phi_m\,\Theta$ ergibt sich

$$\Phi_m\,\Theta = \int_0^{\psi} \frac{1}{\sqrt{\Phi_m^2 - \Phi^2}}\,\frac{d\varphi}{d\psi}\,d\psi$$

und mit (33) und (17)

$$\Phi_m\,\Theta = \int_0^{\psi} \frac{1}{\sqrt{\frac{F}{F_e}\,i_e^2}}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{1-\eta-\psi_m}\right)^2 - \left(\frac{1}{1-\eta-\psi}\right)^2}}\,\frac{i_e^2}{(1-\eta-\psi)^2}\,d\psi.$$

Unter Benutzung von (32) wird

$$\Phi_m\,\Theta = \sqrt{\frac{2n}{n+1}} \int_0^{\psi} \frac{\left(\frac{1-\eta-\psi_m}{1-\eta-\psi}\right)^2}{\sqrt{1-\left(\frac{1-\eta-\psi_m}{1-\eta-\psi}\right)^2}}\,\frac{d\psi}{1-\eta-\psi_m} = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}\left[\arcsin\frac{1-\eta-\psi_m}{1-\eta-\psi}\right]_0^{\psi};$$

$$\Phi_m\,\Theta_m = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1-\eta-\psi_m}{1-\eta}\right); \qquad \frac{1-\eta-\psi_m}{1-\eta} = \cos\left(\sqrt{\frac{n+1}{2n}}\,\Phi_m\,\Theta_m\right). \tag{34}$$

Aus (33) folgt mit (32)

$$\Phi_m = \sqrt{\frac{8n}{(n+1)^3}}\sqrt{\left(\frac{1}{1-\eta-\psi_m}\right)^2 - \left(\frac{1}{1-\eta}\right)^2} = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}\sqrt{\left(\frac{1-\eta}{1-\eta-\psi_m}\right)^2 - 1}$$

und mit (34)

$$\Phi_m = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}\,\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{2n}}\,\Phi_m\,\Theta_m\right).$$

Aus der Übergangsbedingung (29) wird dann

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{2n}}\,\Phi_m\,\Theta_m\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_K}} - \Phi_m\,\Theta_m\right) = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}. \tag{35}$$

Für die größte Durchbiegung $w_m$ in Stabmitte ergibt sich nach (16d) und (17)

$$\frac{w_m}{c} = \frac{\Delta P}{P}\left(\frac{i^2}{1-\eta-\psi_m} - \eta_j\right),$$

und mit (34) und (32)

$$\frac{w_m}{c} = \frac{\Delta P}{P}\left[\frac{2n}{n+1}\,\frac{1}{\cos\left(\sqrt{\frac{n+1}{2n}}\,\Phi_m\,\Theta_m\right)} - \frac{n-1}{n+1}\right]. \tag{36}$$

[1] Eine Näherungsrechnung für den Zweipunktquerschnitt wurde von *U. Müllersdorf*, Bau-Ing. 27 (1952), S. 57 veröffentlicht. Diese Näherung hat den Vorteil, daß genaue gekrümmte Spannungs-Dehnungsdiagramm berücksichtigen zu können.

Die Formeln (35) und (36) stellen die Lösung des Problems dar. Bei gegebenem $P_0$ und $\Delta P$ folgt aus (35) zunächst $\Phi_m\,\Theta_m$ und dann aus (36) $w_m$. Nach (25) und (28) ist mit $i^2 = 1$

$$\Phi_m\,\Theta_m = \frac{a}{l}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_K}}\,.$$

Damit nimmt (35) die Form

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{2n}}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_K}}\,\frac{a}{l}\right)\cdot\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_K}}\left(1-\frac{a}{l}\right)\right] = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$$

an, aus der sich besonders bequem die Grenzfälle von $P$ ablesen lassen, die sich für $a = 0$ und $a = l$ ergeben. Im ersten Fall wird

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_K}} = \infty\,, \qquad P = P_K$$

und im zweiten

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{n+1}{2n}}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_K}}\right) = \infty\,, \qquad P = P_K\,\frac{2n}{n+1} = \overline{P}_K\,,$$

also gleich dem *Engesser-Kármán*schen Wert, da in der Tat beim Zweipunktquerschnitt

$$\overline{J} = J_s = \frac{2n}{n+1}\,J$$

ist.

Zur weiteren Veranschaulichung der Zusammenhänge sind für verschiedene Parameter $n$ in Abb. 10 die zu den stabilen Gleichgewichtslagen gehörenden Kraft-Verformungskurven und in Abb. 11 die Abhängigkeit zwischen $P/P_K$ und $a/l$ aufgetragen. Grundsätzlich Neues gegenüber den Verhältnissen beim Rechteckquerschnitt ergibt sich dabei nicht.

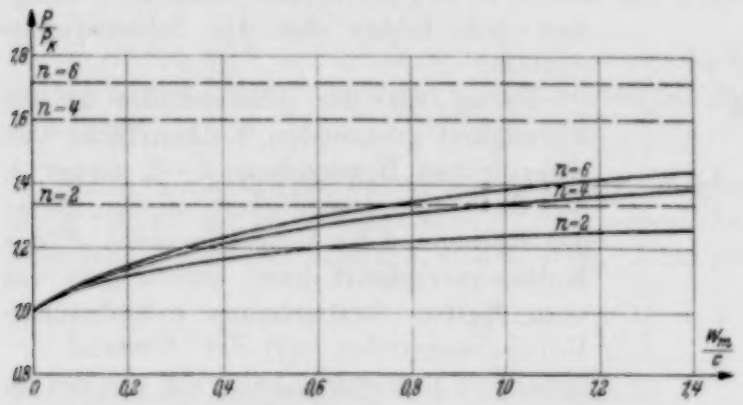


Abb. 10. $P/P_K$ in Abhängigkeit von $w_m/c$ mit $n$ als Parameter. Zweipunktquerschnitt.

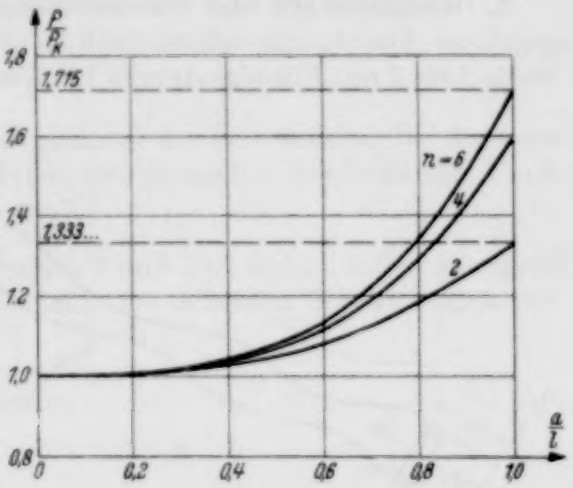


Abb. 11. $P/P_K$ in Abhängigkeit von $a/l$ mit $n$ als Parameter. Zweipunktquerschnitt.

**7. Zusammenfassung.** Für einen beiderseits gelenkig gelagerten Knickstab mit beliebigem, aber über die Stablänge konstantem Querschnitt wird das „*Euler*knicken" (nicht das Biegedrehknicken) im plastischem Bereich den Gedankengängen von *Shanley* folgend untersucht. Zur Erfassung des plastischen Verhaltens des Stabes werden die Annahmen der *Engesser-Kármán*schen Theorie benutzt. Die Rechnung führt mathematisch auf eine nichtlineare Differentialgleichung für die Breite des sich beim Knicken ausbildenden „Entlastungsbereiches". Mechanisch gesehen ergibt sich ein Knickbiegungsproblem, da im Entlastungsbereich eine Schwerpunktverschiebung des „ideellen" wirksamen Querschnitts gegenüber der Wirkungslinie der Last und damit zusätzliche Biegemomente entstehen. Bedingt durch die Unstetigkeit im Elastizitätsgesetz geht die ursprünglich stabile Gleichgewichtsform des geraden Stabes in die Gleichgewichtslage des ausgebogenen Stabes über, ohne daß dabei ein Punkt indifferenten Gleichgewichts auftritt. Die *Engesser-Kármán*sche Lösung erscheint als eine Sonderlösung des Problems, die jedoch zu labilen Gleichgewichtszuständen gehört. Die Zusammenhänge werden zahlenmäßig am Rechteckquerschnitt und am Zweipunktquerschnitt untersucht.

(Eingegangen am 20. März 1952.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. habil. *A. Pflüger*, Hannover, Dieterichsstraße 36.

# Eigenschwingungen idealer Flüssigkeiten in Rohrleitungen mit verschiedenen Endquerschnitten.

Von **Hsien-Chih Liu.**

**1. Einleitung.** Die analytische Behandlung von Schwingungen einer Flüssigkeitssäule in Rohrleitungen mit veränderlichem Querschnitt führt auf die Zuhilfenahme einer vereinfachenden Rechengröße, der sogenannten reduzierten Länge. Dies ist seit Jahrzehnten bekannt. Unter der reduzierten Länge versteht man die Länge derjenigen zylindrischen Flüssigkeitssäule, die der betrachteten Flüssigkeitssäule mit veränderlichem Querschnitt in ihrem physikalischen Verhalten äquivalent ist. Während der Schwingung einer beliebig geformten Flüssigkeitssäule ändert sich mit ihren Ortskoordinaten im allgemeinen auch die jeweilige Größe der entsprechenden reduzierten Länge. Bei sehr großen reduzierten Längen und sehr kleiner Amplitude kann diese Änderung vernachlässigt werden. Trifft ersteres nicht zu, so darf die Änderung der reduzierten Länge unter Umständen nicht unberücksichtigt bleiben; d. h. die Größe der Änderung der reduzierten Länge kann nicht mehr als vernachlässigbar klein gegen die ursprüngliche reduzierte Länge betrachtet werden. Das Ziel der vorliegenden Arbeit[1] ist, den Einfluß zu untersuchen, den diese Änderung der reduzierten Länge auf die Eigenschwingung hat. Der Einfachheit halber wird hier nur derjenige Fall behandelt, bei dem die Enden der Flüssigkeitssäule während der Bewegung zwar beliebig große aber jeweils konstante Rohrabschnitte bestreichen.

**2. Bezeichnungen und Voraussetzungen.** Das Schwingungssystem möge durch die in Abb. 1 gegebene Anordnung schematisch dargestellt sein. Die Rohrleitung ist im Ruhezustand von Stelle *1* bis *2* mit Flüssigkeit gefüllt. Die Feder $c$, der Kolben $F$, und die darüber stehende Flüssigkeitssäule bilden also das Schwingungssystem.

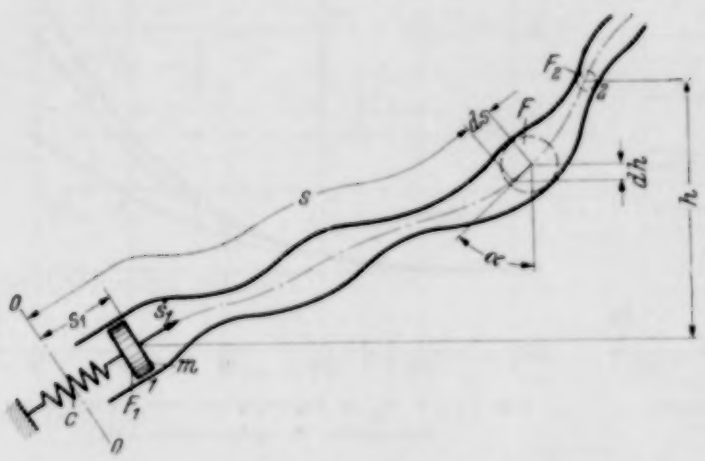


Abb. 1. Festlegung der Koordinaten für das Schwingungssystem.

Es sei $s_1(t)$ der Abstand der an die Flüssigkeit grenzenden Kolbenfläche von einer festen Bezugsebene 0—0, ferner $\dot{s}_1$ die Kolbengeschwindigkeit, $m$ die Masse des Kolbens, $c$ die Federkonstante, $F_1$ der Kolbenquerschnitt bzw. Querschnitt des vom Kolben bestrichenen zylindrischen Rohrleitungsteiles, $s(t)$ der Abstand des beliebigen Rohrquerschnittes $F$ von der im Raum festen Bezugsebene 0—0, $F_2$ der Endquerschnitt der vom Kolben hin- und hergeschobenen Flüssigkeitssäule, $s_2(t)$ ihr Abstand von der festen Bezugsebene, $p_2 = p_0$ der Atmosphärendruck am freien Ende der Flüssigkeitssäule, $p_1$ der vom Kolben auf die Flüssigkeitssäule ausgeübte Druck und $p_1 F_1$ die entsprechende Kolbenkraft. Es soll keine Kavitation auftreten. $F \equiv F(s)$ ist eine von der Zeit unabhängige, konstante Funktion.

Außer dem atmosphärischen Druck $p_0$ wirkt auf die untere Kolbenseite die Federkraft $c\,s_1$; letztere verschwindet an der Stelle $s_1 = 0$.

Die Flüssigkeit sei reibungsfrei und inkompressibel. Die Reibung zwischen Kolben und Rohrwand wird vernachlässigt.

Es wird weiterhin $\sqrt{F} \ll s_2 - s_1$ vorausgesetzt und die seitlichen Geschwindigkeitskomponenten können vernachlässigt werden.

Endlich sei $v$ die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der beliebigen Stelle $s$, ferner $\alpha$ der Winkel zwischen der Vertikalen und der Tangente an die Mittellinie der Flüssigkeitssäule an einer beliebigen Stelle $s$ und $h$ der Höhenunterschied zwischen den Enden der Flüssigkeitssäule.

[1] Diese Arbeit ist von mir größtenteils fertiggestellt, während ich (1943) als ständiger Assistent am Lehrstuhl und Institut für Mechanik der Technischen Hochschule zu Berlin tätig war. An dieser Stelle möchte ich nicht versäumen, Herrn Prof. *Kucharski* meinen Dank auszusprechen für einige Anregungen, die zur Vollendung dieser Arbeit beitrugen.

**3. Ableitung der Bewegungsgleichung aus der *Bernoulli*schen Gleichung für instationäre Strömung.** Die Bewegungsgleichung für den Kolben ergibt sich unmittelbar aus der *Newton*schen Grundgleichung

$$m\frac{d^2s_1}{dt^2} + (p_1 - p_0)F_1 + c\,s_1 = 0\,. \tag{1}$$

Die Druckdifferenz $p_1 - p_0 = p_1 - p_2$ läßt sich ebenfalls sofort nach der bekannten verallgemeinerten *Bernoulli*schen Gleichung hinschreiben:

$$p_1 - p_0 = \gamma h + \frac{\varrho}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \varrho L\frac{d^2s_1}{dt^2} \qquad \text{mit} \qquad L = \int_{s_1}^{s_2}\frac{F_1}{F}\,ds\,. \tag{2}$$

Hierin bedeuten $\varrho$ die spezifische Masse und $\gamma$ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit.

Setzt man

$$\eta = \frac{F_1}{F}\,, \qquad \eta_2 = \frac{F_1}{F_2}\,, \tag{3}$$

dann wird

$$v_2^2 - v_1^2 = (\eta_2^2 - 1)\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2$$

mit $$L = \int_{s_1}^{s_2}\eta\,ds\,, \tag{4}$$

und hiermit lautet die Bewegungsgleichung (1)

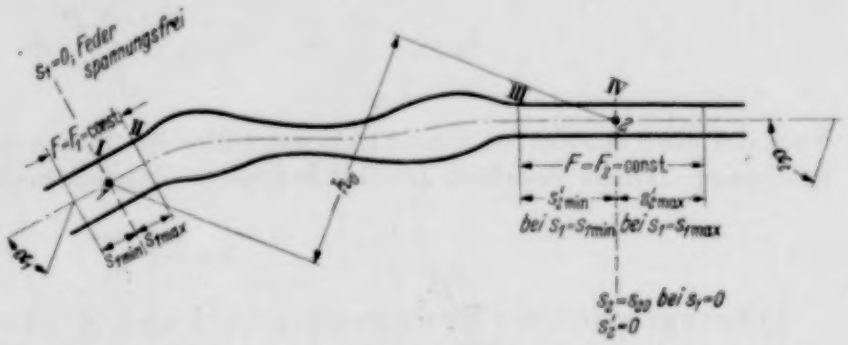


Abb. 2. Sonderfall des Rohres, $F=F_1=$ konst. bei Stelle *1*, $F=F_2=$ konst. bei Stelle *2*.

$$\left(m + \varrho F_1\int_{s_1}^{s_2}\eta\,ds\right)\frac{d^2s_1}{dt^2} + \frac{\varrho}{2}F_1(\eta_2^2 - 1)\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + c\,s_1 + \gamma F_1 h = 0\,. \tag{5}$$

Hierin sind $\eta$, $\eta_2$, $h$ und $s_2$ bekannte Funktionen von $s_1$, das sich mit der Zeit ändert. Bei der reduzierten Länge $L$ ändern sich mit $s_1$ die Grenzen des Integrales; also ist auch $L$ eine bekannte Funktion von $s_1$.

**4. Ein Sonderfall der Bewegungsgleichung.** Bei den Stellen *1* und *2* in Abb. 2 sollen genügend lange Stücke mit $F_1 =$ konst. und $F_2 =$ konst. vorhanden sein. Diese beiden Stücke mögen verschiedene Neigungen besitzen, also $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Jetzt gilt

$$\eta_2^2 - 1 = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 - 1 = \text{konst.} \tag{6}$$

Die reduzierte Länge schreibt man zweckmäßig

$$L = \int_{s_1}^{s_2}\eta\,ds = \int_{0}^{s_{20}}\eta\,ds - \int_{0}^{s_1}\eta\,ds + \int_{s_{20}}^{s_2}\eta\,ds\,; \tag{7}$$

hierin ist

$$L_0 = \int_{0}^{s_{20}}\eta\,ds = \text{konst.}\,, \qquad \int_{0}^{s_1}\eta\,ds = s_1\,, \qquad \int_{s_{20}}^{s_2}\eta\,ds = \eta_2^2\,s_1\,,$$

also

$$L = L_0 + (\eta_2^2 - 1)\,s_1\,, \qquad h = h_0 + (\eta_2\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\,s_1\,.$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}(m + \varrho F_1 L_0 + \varrho F_1(\eta_2^2 - 1)\,s_1)\frac{d^2s_1}{dt^2} + \frac{\varrho}{2}F_1(\eta_2^2 - 1)\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + \\ + \left(\gamma F_1(\eta_2\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) + c\right)s_1 + \gamma F_1 h_0 = 0\,.\end{aligned} \tag{8}$$

Wenn man

$$\gamma F_1(\eta_2\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) + c = c_1\,, \qquad m + \varrho F_1 L_0 - \frac{2a\gamma F_1 h_0}{c_1} = m_1\,,$$

$$\varrho F_1(\eta_2^2 - 1) = 2a\,, \qquad s_1 = \xi_1 - \frac{\gamma F_1 h_0}{c_1}$$

in (8) eingesetzt, so erhält man schließlich die Bewegungsgleichung in der Form

$$(m_1 + 2a\,\xi_1)\,\frac{d^2\xi_1}{dt^2} + a\left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2 + c_1\,\xi_1 = 0\,. \tag{9}$$

**5. Integration der Differentialgleichung für den Fall $F_1 = \text{konst.}$, $F_2 = \text{konst.}$** a) Die notwendige Einschränkung der Schwingungsamplitude. Der Wert $\eta_2$ in (9) ist je nach der Rohrgestaltung sehr mannigfaltig, das Gleiche gilt dementsprechend auch für die Lösung dieser Differentialgleichung. Wegen der großen mathematischen Schwierigkeit beschränken wir uns hier nur auf die Untersuchung für den Sonderfall $F_1 = \text{konst.}$ und $F_2 = \text{konst.}$ Nach dieser Einschränkung müssen die beiden Enden der Flüssigkeitssäule sich stets in Rohrstücken von konstantem Querschnitte bewegen. Das Rohr wird durch die Ziffern I, II, III, und IV in drei Strecken unterteilt. Es wird also

$$L_0 = \int_{\mathrm{I}}^{\mathrm{IV}} \frac{F_1}{F}\,ds = S_{1\,max} + \int_{\mathrm{II}}^{\mathrm{III}} \frac{F_1}{F}\,ds + \eta_2\,s_{2\,max}\,. \tag{10}$$

Nach der oben erwähnten Einschränkung sollen die Enden der Flüssigkeitssäule sich während der Bewegung niemals innerhalb II—III befinden. Deshalb muß die Anfangsauslenkung ($t = 0$) sein:

$$s_{10} \leq \frac{s_{2\,max}}{\eta_2}\,. \tag{11}$$

b) Integration der Bewegungsgleichung. Man kann feststellen, daß die Multiplikation von (9) mit $\dot{\xi}_1$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1}{2}\,\dot{\xi}_1^2 + a\,\xi_1\cdot\dot{\xi}_1^2 + \frac{c_1}{2}\,\xi_1^2\right) = 0$$

und nach der ersten Integration

$$\frac{m_1}{2}\,\dot{\xi}_1^2 + a\,\xi_1\cdot\dot{\xi}_1^2 + \frac{c_1}{2}\,\xi_1^2 = A \tag{12}$$

liefern, wobei $A = \frac{1}{2}\,c_1\,\xi_{10}^2$ durch die Anfangsbedingung $t = 0$, $\xi_1 = \xi_{10}$ und $\dot{\xi}_1 = 0$ bestimmt ist. Gleichung (12) läßt sich schreiben

$$\left|\frac{d\xi_1}{dt}\right| = \sqrt{c_1}\,\sqrt{\frac{\xi_{10}^2 - \xi_1^2}{m_1 + 2\,a\,\xi_1}}\,. \tag{12a}$$

Gleichung (12a) besagt, daß die Maximalausschläge auf beiden Seiten der Gleichgewichtslage gleich sind. Auffällig ist das Auftreten von $\xi_1$ im Nenner unter der Wurzel. Daraus kann man schließen, daß die absoluten Werte der Geschwindigkeit bezogen auf gleiche Abstände zu beiden Seiten der Gleichgewichtslage nicht gleich sind. Wenn man $\dot{\xi}_1$ gegen $\xi_1$ aufträgt, so erhält man ellipsenartige Kurven (Abb. 4), deren Maximalwerte jedoch nicht auf der Achse $\xi_1 = 0$ liegen. Nach welcher Seite und wie weit sich diese Maximalwerte gegen die Mittellage verschieben, wird durch den Wert $\eta_2$ bestimmt. Der Wert

$$\xi_1 = -\frac{m_1}{2\,a} \pm \sqrt{\left(\frac{m_1}{2\,a}\right)^2 - \xi_{10}^2} \tag{13}$$

liefert den Maxiamalwert von $\dot{\xi}_1$. Das positive Zeichen vor der Wurzel gilt für den Fall $a > 0$, das negative Zeichen für den Fall $a < 0$. Man kann noch zeigen, daß

$$\left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)_{max}^2 = \frac{c_1}{a}\left(\frac{m_1}{2\,a} \mp \sqrt{\left(\frac{m_1}{2\,a}\right)^2 - \xi_{10}^2}\right), \tag{14}$$

ist, wobei das negative Zeichen für $a < 0$ und das positive Zeichen für $a < 0$ zu setzen sind. Ferner kann man schreiben

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = -c_1\,\frac{a\,\xi_{10}^2 + m_1\,\xi_1 + a\,\xi_1^2}{(m_1 + 2\,a\,\xi_1)^2}\,. \tag{15}$$

Die Beschleunigung ist also nicht symmetrisch zur Gleichgewichtslage, (Abb. 3 und Abb. 5), d. h. sie hat bei gleichen Ausschlägen zu beiden Seiten der Nullage verschiedene Werte. Im Gegensatz

zu den einfachharmonischen Schwingungen ist hier die Beschleunigung bei $\xi_1 = 0$ nicht mehr Null, sondern

$$\left(\frac{d^2\xi_1}{dt^2}\right)_{\xi_1=0} = -c_1 \frac{a\,\xi_{10}^2}{m_1^2}\,. \tag{16}$$

Für die maximale Beschleunigung hat man

$$\left(\frac{d^2\xi_1}{dt^2}\right)_{max} = -\frac{c_1\,\xi_{max}}{m_1 + 2\,a\,\xi_{max}}\,. \tag{17}$$

Da die rechte Seite von Gleichung (17) keine symmetrische Funktion von $\xi_{max}$ in bezug auf die Gleichgewichtslage ist, liefert sie bei gleichen positiven und negativen Ausschlägen zu beiden Seiten der Gleichgewichtslage ungleiche absolute Werte. Auf der Seite, auf der die reduzierte Länge mit zunehmendem Ausschlag anwächst, ist der absolute Betrag der Beschleunigung größenmäßig überwiegend. Dies gilt auch umgekehrt.

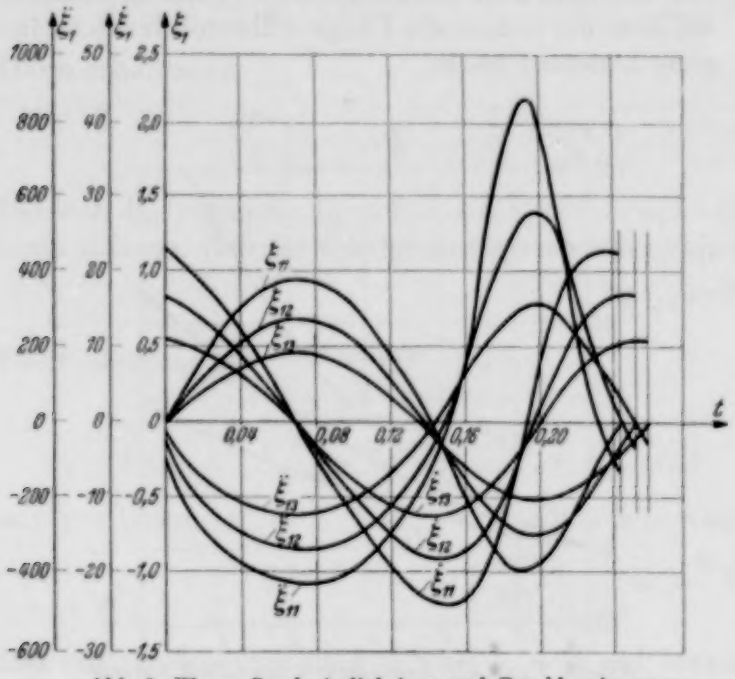


Abb. 3. Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Abhängigkeit von der Zeit für $\eta_2 = 6$.

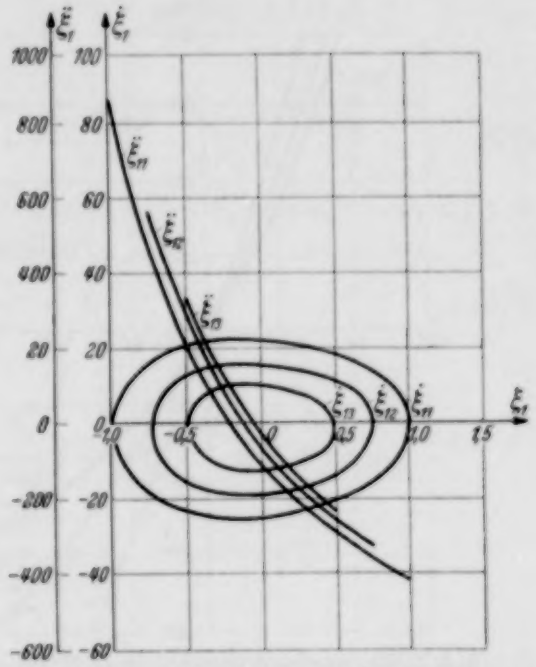


Abb. 4. Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Abhängigkeit vom Wege für $\eta_2 = 6$.

Nach Trennung der Veränderlichen und Ausführung der Integration nach der Zeit in (12a) ergibt sich

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \int_{\xi_{11}}^{\xi_{12}} \sqrt{\frac{m_1 + 2\,a\,\xi_1}{\xi_{10}^2 - \xi_1^2}}\; d\xi_1\,. \tag{18}$$

Man setzt $\xi_1 = \xi_{10} \cos\varphi$ in (18) ein und erhält

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{2\,a\,\xi_{10}}{c_1}} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \sqrt{\frac{m_1}{2\,a\,\xi_{10}} + \cos\varphi}\; d\varphi\,. \tag{19}$$

Nach weiteren Umformungen läßt sich schreiben

$$t - t_0 = 2\sqrt{\frac{m_1 + 2\,a\,\xi_{10}}{c_1}} \int_{\psi_2}^{\psi_1} \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2\psi}\; d\psi\;; \tag{20}$$

darin sind

$$a > 0\,, \qquad 2\,\psi = \varphi\,, \qquad 0 < k^2 = \frac{4\,a\,\xi_{10}}{m_1 + 2\,a\,\xi_{10}} < 1\,. \tag{21}$$

Der Ausschlag sei willkürlich als positiv zu betrachten, wenn die reduzierte Länge $L$ mit wachsendem Ausschlag zunimmt und umgekehrt. Dann wird die Schwingungszeit für die Schwingungsabschnitt von Null bis $\xi_{10}$ und wieder nach Null zurück mit der üblichen Darstellung für ein ellip-

tisches Integral zweiter Art

$$T_{zu} = 4\sqrt{\frac{m_1 + 2\,a\,\xi_{10}}{c_1}}\; E\left(\sqrt{\frac{4\,a\,\xi_{10}}{m_1 + 2\,a\,\xi_{10}}}\,,\,\frac{\pi}{4}\right). \tag{22}$$

Entsprechend wird die Zeit für die Halbschwingung der entgegengesetzten Richtung von Null bis $-\xi_{10}$ und wieder nach Null zurück

$$T_{ab} = 4\sqrt{\frac{m_1 + 2\,a\,\xi_{10}}{c_1}}\left[E - E\left(\sqrt{\frac{4\,a\,\xi_{10}}{m_1 + 2\,a\,\xi_{10}}}\,,\,\frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{23}$$

Die Addition von (22) und (23) liefert die Schwingungsdauer einer vollständigen Schwingung

$$T^* = T_{zu} + T_{ab} = 4\sqrt{\frac{m_1 + 2\,a\,\xi_{10}}{c_1}}\; E\,, \tag{24}$$

worin $E$ ein vollständiges, elliptisches Integral zweiter Gattung ist. $T^*$ ist absichtlich eingeführt um von dem Fall unterschieden werden zu können, bei dem die reduzierte Länge während der Schwingung konstant bleibt.

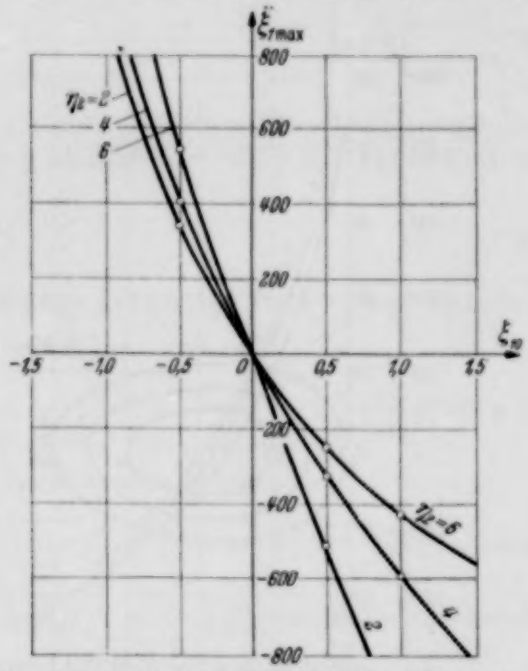


Abb. 5. Die maximale Beschleunigung in Abhängigkeit von den größten Auslenkungen mit $\eta_2$ als Parameter.

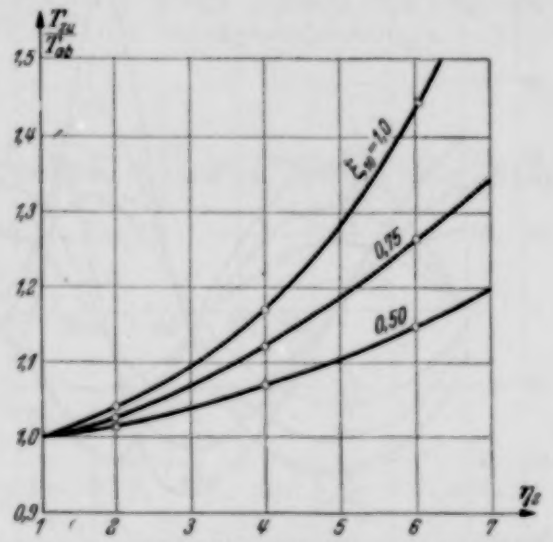


Abb. 6. $T_{zu}/T_{ab}$ in Abhängigkeit von $\eta_2$ mit Anfangsauslenkung $\xi_{10}$ als Parameter.

Durch Reihenentwicklung des Integranden der Gleichung (24) und mit $M = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$ erhält man

$$T^* = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + 2\,a\,\xi_{10}}{c_1}}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M^2}{2n-1}\left(\frac{4\,a\,\xi_{10}}{m_1 + 2\,a\,\xi_{10}}\right)^n\right]. \tag{25}$$

Aus (22) und (23) lassen sich noch die folgenden Verhältnisse aufstellen:

$$\frac{T^*}{T_{zu}} = \frac{E}{E\left(k,\frac{\pi}{4}\right)}\,,\qquad \frac{T_{ab}}{T_{zu}} = \frac{E - E\left(k,\frac{\pi}{4}\right)}{E\left(k,\frac{\pi}{4}\right)}\,,\qquad \frac{T^*}{T_{ab}} = \frac{E}{E - E\left(k,\frac{\pi}{4}\right)}\,. \tag{26}$$

Da nach der Eigenschaft der elliptischen Integrale stets

$$E\left(k,\frac{\pi}{4}\right) < E < 2\,E\left(k,\frac{\pi}{4}\right)$$

ist, so ergibt sich noch die folgende Tatsache:

$$T_{ab} < T_{zu} \qquad \text{(gültig für } \eta_2 \neq 1)\,, \tag{27}$$

d. h. die Schwingungszeit in der Richtung, in der die reduzierte Länge der Rohrleitung mit Zunahme der Auslenkung wächst, ist größer (Abb. 6), als die in der entgegengesetzten Richtung. Je mehr sich die beiden Endquerschnitte voneinander unterscheiden, desto größer ist die Abweichung der Schwingungszeiten in beiden Richtungen voneinander. Außerdem wird auch diese Abweichung von der Vergrößerung der Anfangsauslenkung verstärkt.

c) Vergleich zwischen $T^*$ und $T$. $T$ sei die Schwingungsdauer eines ähnlichen Systems, das sich aus einem Kolben mit der Masse $m$, einer Feder mit der Federkonstanten $c$ und einer Flüssigkeitssäule von konstantem Querschnitt mit einer Länge $L_0$ zusammensetzt. Die Schwingungsdauer für ein solches System ist offenbar unabhängig von der Größe der Amplitude. Die Schwingungsdauer $T$ dieses vereinfachten Systems soll als Vergleichswert für den Abschnitt b) behandelten Fall herangezogen werden. Die Neigungen der Rohrenden im behandelten und im vereinfachten System sollen an den Stellen *1* bzw. *2* jeweils einander gleich sein. Für den vereinfachten Fall ist

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \varrho F_1 L_0}{c + \gamma F_1 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)}},$$

und für den behandelten Fall ist

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + \varrho F_1 (\eta_2^2 - 1)\, \xi_{10}}{c_1}} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{2n-1} M^2 \left( \frac{2 \varrho F_1 (\eta_2^2 - 1)\, \xi_{10}}{m_1 + \varrho F_1 (\eta_2^2 - 1)\, \xi_{10}} \right)^n \right].$$

Dann erhält man

$$\left( \frac{T^*}{T} \right)_{\xi_{10} \to 0} = \sqrt{\frac{c + \gamma F_1 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)}{c + \gamma F_1 (\eta_2 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)}} \sqrt{1 - \frac{\varrho F_1 (\eta_2^2 - 1)\, \gamma F_1 h_0}{c_1 (m + \varrho F_1 L_0)}}. \tag{28}$$

Mit den Bedingungen $\eta_{/2} > 1$, $c + \gamma F_1 (\eta^2 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) > 0$ und $c + \gamma F_1 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) > 0$ kann man aus (28) die Gültigkeit folgender Beziehung feststellen:

$$T^*_{\xi_{10} \to 0} < T. \tag{29}$$

Die Bedingung $\frac{\partial T^*}{\partial \xi_{10}} = 0$ liefert

$$\frac{m_1}{m_1 + 2 a \xi_{10}} \left[ 1 + 4 \sum_{n=2}^{\infty}{}' \frac{n}{2n-1} M^2 \left( \frac{4 a \xi_{10}}{m_1 + 2 a \xi_{10}} \right)^{n-1} \right] - \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{2n-1} M^2 \left( \frac{4 a \xi_{10}}{m_1 + 2 a \xi_{10}} \right)^n = 1,$$

mit der Lösung $\xi_{10} = 0$. Mit $\xi_{10} = 0$ läßt sich bestätigen, daß

$$\left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial \xi_{10}^2} \right)_{\xi_{10} = 0} = -\frac{\pi \varrho^2 F_1^2 (\eta_2^2 - 1)^2}{4 \sqrt{c_1 m_1^3}}.$$

Hiermit ist bestätigt, daß $T^*$ bei $\xi_{10} = 0$ ein Maximum besitzt. Infolgedessen ist damit auch bewiesen, daß prinzipiell stets

$$T^* < T \tag{30}$$

ist. Die $(T^* \xi_{10})$-Kennlinie besitzt bei $\xi_{10} = 0$ eine waagerechte Tangente und fällt mit wachsendem $\xi_{10}$ monoton gegen die $\xi_{10}$-Achse.

d) Verlauf von $T_{zu}$ und $T_{ab}$ in Abhängigkeit von $\xi_{10}$. Aus der Beziehung

$$\left( \frac{\partial T_{zu}}{\partial \xi_{10}} \right)_{\xi_{10} = 0} = \frac{\varrho F_1 (\eta_2^2 - 1)}{\sqrt{m_1 c_1}}$$

ist ersichtlich, daß die $(T_{zu}, \xi_{10})$-Kurve bei $\xi_{10} = 0$ nur horizontal verlaufen kann, wenn $\eta_2 = 1$, d. h. $F_2 = F_2$ ist. Ist $\eta_2 > 1$, so steigt die Kurve mit wachsendem $\xi_{10}$, sie fällt, wenn $\eta_2 < 1$. Der Verlauf von $T_{ab}$ kann von der Differenz $T^* - T_{zu}$ leicht abgeleitet werden.

e) Vergleich zwischen $T/2$ und $(T_{zu})_{\xi_{10}=0}$. Aus Gleichung (22) erhält man

$$(T_{zu})_{\xi = 0} = \pi \sqrt{\frac{m + \varrho F_1 L_0}{c + \gamma F_1 (\eta_2 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)} - \frac{2 a \gamma F_1 h_0}{[c + \gamma F_1 (\eta_2 \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)]^2}}. \tag{31}$$

Daraus läßt sich schließen, daß

$$(T_{zu})_{\xi \to 0} < \frac{T}{2} \tag{32}$$

wird.

**6. Zusammenfassung.** Die Darstellung der Schwingung einer idealen Flüssigkeit in Rohrleitungen beliebiger Gestalt führt zu nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung; bei diesen ist der Koeffizient des zweiten Differentialquotienten eine lineare Funktion des Ausschlages. Die Differentialgleichung ist wegen des Vorhandenseins eines quadratischen Gliedes des ersten

Differentialquotienten nicht linear. Das Verhältnis der beiden Leitungsquerschnitte an den Enden der Flüssigkeitssäule tritt als ein wichtiger Parameter in sämtlichen Koeffizienten der Bewegungsgleichung auf.

Die oben erwähnte Differentialgleichung gewinnt wieder ihre lineare Eigenschaft, wenn und nur wenn die beiden Leitungsquerschnitte an den Enden der Flüssigkeitssäule gleich macht. Wenn die Leitungsquerschnitte an den Enden der Flüssigkeitssäule verschieden groß aber konstant sind, läßt sich die Differentialgleichung mathematisch streng lösen. Die Schwingungszeiten in beiden Richtungen weichen voneinander ab. Diese Abweichung wird von der Vergrößerung des Ausschlags monoton verstärkt. Die Schwingungszeit für die Richtung, in der die reduzierte Länge mit wachsendem Ausschlag zunimmt, überwiegt unter Umständen um ein beträchtliches Maß.

(Eingegangen am 25. Januar 1952.)

Anschrift des Verfassers: *Hsien-Chih Liu*, Tsinan (China), Technische Hochschule.

# Über Schwingungen einer idealen Flüssigkeit in ellipsen- und kreisbogenförmigen, kommunizierenden Röhren.

Von Hsien Chih Liu.

**1. Einleitung.** Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung von Schwingungen einer idealen Flüssigkeit in ellipsen- und kreisförmig gebogenen Röhren von konstantem Querschnitt. Der erste Fall wird behandelt mit der Einschränkung, daß die beiden Enden der Flüssigkeitssäule in der Gleichgewichtslage mit einem Hauptdurchmesser der ellipsenförmig gebogenen Röhre zusammenfallen. Für beide Fälle gilt die Annahme, daß die Endflächen der Flüssigkeitssäule stets senkrecht zur Mittellinie der Röhre sind.

**2. Schwingungen einer idealen Flüssigkeit in ellipsenförmiger, kommunizierender Röhre von konstantem Querschnitt.** Es sei angenommen, daß die ellipsenförmig gebogene Röhre konstanten Querschnitt besitzt. Man wird aus Nachfolgendem ersehen, daß diese Einschränkung gar nicht notwendig ist. Es genügt, daß die beiden Enden der Flüssigkeitssäule sich während der Bewegung in Rohrabschnitten mit konstanten Querschnitten bewegen. Die Gestaltung des dazwischen liegenden Teiles der Röhre ist völlig belanglos, wenn man die Gestaltung des Rohres bei Errechnung der reduzierten Länge der Flüssigkeitssäule entsprechend berücksichtigt. Die beiden Enden der Flüssigkeitssäule sind auch während der Bewegung gleichem Druck unterworfen. Die Flüssigkeit sei außerdem inkompressibel; Kavitation soll nicht auftreten.

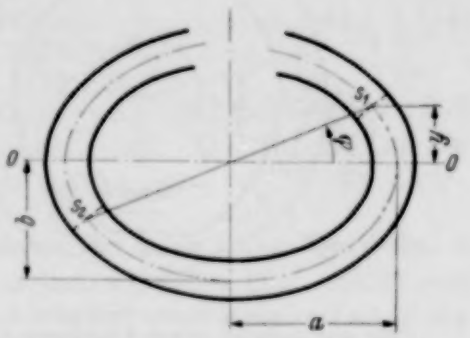


Abb. 1. Zur Schwingung idealer Flüssigkeiten in ellipsenförmiger, kommunizierender Röhre mit konstantem Querschnitt.

Nach der verallgemeinerten *Bernoulli*schen Gleichung erhält man mit den Bezeichnungen von Abb. 1

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t}\, ds + 2\,g\,y = 0\,, \tag{1}$$

wobei $y$ der Abstand des Flüssigkeitsspiegels von der Gleichgewichtslage und $v$ die Geschwindigkeit der Strömung an einer beliebigen Stelle $s$ bedeutenten. Ferner gilt

$$L = \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}\, d\varphi \tag{2}$$

und

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{\partial s}{\partial \varphi}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,, \tag{3}$$

hierin bezeichnen $L$ die Länge der Flüssigkeitssäule zwischen irgend zwei Grenzstellen $s_1$ und $s_2$, $\varphi$ den Winkel entsprechend Abb. 1 und $t$ die Zeit. Das Einsetzen von (2), (3) und in (1) liefert die Bewegungsgleichung

$$(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + (a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{2\,g\,b}{L_0}\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\sin\varphi = 0\,. \tag{4}$$

wobei $L_0$ die Länge der Flüssigkeitssäule bedeutet, die gemäß unserer Voraussetzung die Hälfte des Ellipsenumfangs beträgt. Es läßt sich zeigen, daß die Beschleunigung nicht linear von $\varphi$ abhängt, sie aber zu beiden Seiten der Ruhelage bei gleichem Abstand, gleichen absoluten Wert hat. Nach Umformung läßt sich Gleichung (4) mit

$$M = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\,n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\,n}$$

schreiben

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{2\,g\,a\,b}{L_0}\cos\varphi + \frac{2\,g\,a\,b}{L_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\,n-1}\,M\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^n \frac{\cos^{2\,n+1}\varphi}{2\,n+1}\right] = 0 \tag{6}$$

oder nach Integration und Bestimmung der Integrationskonstanten durch die Randbedingung $\varphi = \varphi_0$, $d\varphi/dt = 0$ für eine volle Schwingung

$$T = 2\sqrt{\frac{L_0}{g\,a\,b}} \int_0^{\varphi_0} \frac{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} M \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^n \frac{\cos^{2n+1}\varphi - \cos^{2n+1}\varphi_0}{2n+1}}}\, d\varphi\,. \tag{7}$$

Die Integration der rechten Seite von (7) ist als allgemeiner Ausdruck schwierig auszuführen; sie kann aber im Prinzip als gelöst betrachtet werden.

**3. Schwingungen idealer Flüssigkeiten in kreisförmiger Röhre mit zwei verschieden großen konstanten Querschnitten.** Nach der erweiterten *Bernoulli*schen Gleichung gilt für die beiden Enden der Flüssigkeitssäule (Abb. 2), wegen $p_1 = p_2 =$ Atmosphärendruck

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + (y_1 - y_2) = \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t}\, ds\,. \tag{8}$$

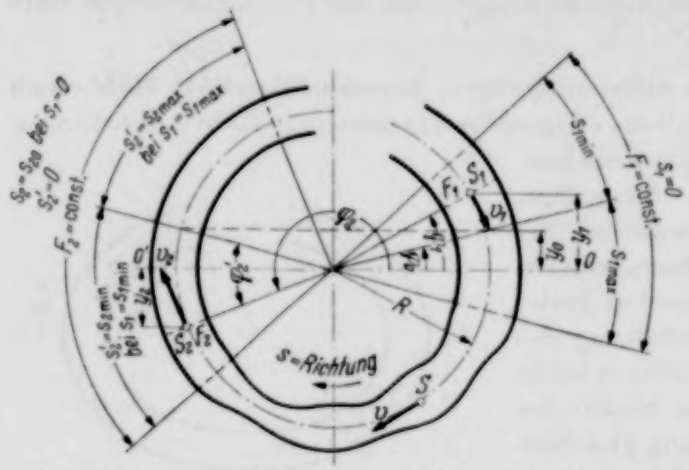


Abb. 2. Zur Schwingung idealer Flüssigkeit in kreisförmiger Röhre mit zwei ungleich großen konstanten Querschnitten.

In Abb. 2 ist $y_0$ der Abstand der Flüssigkeitsspiegel bei Gleichgewicht von der Bezugsebene $0 - 0_1$ und $\varphi_0$ der dazu gehörige Winkel. In Gleichung (8) bezeichnen $v_1$ und $v_2$ die Spiegelgeschwindigkeiten in der tangentialen Richtung des Kreises, $v$ die Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle $s$ zwischen den beiden Spiegeln, $y_1$ und $y_2$ die lotrechten Abstände der Spiegel von der Bezugsebene und $ds$ ein in der Strömungsrichtung gemessenes Längenelement. Ferner folgt wegen

$$\eta_2 = \frac{F_1}{F_2}, \qquad v_1 F_1 = v_2 F_2\,, \qquad y_1 = R \sin\varphi_1$$

$$\varphi_2' = \eta^2(\varphi_1 - \varphi_0)\,, \qquad \varphi_2 = \pi - \varphi_0 + \eta_2(\varphi_1 - \varphi_0)\,, \qquad y_2 = R\sin(\varphi_0 - \varphi_2')$$

aus (8)

$$\frac{v_1^2}{2g}(1 - \eta_2^2) + R[\sin\varphi_1 + \cos\varphi_0 \sin\eta_2(\varphi - \varphi_0) - \sin\varphi_0 \cos\eta_2(\varphi_1 - \varphi_0)] = \frac{1}{g}\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t}\, ds\,. \tag{9}$$

Unter Beachtung von

$$v_1 = -\frac{ds_1}{dt}\,, \qquad v\,F = v_1 F_1\,, \qquad \eta = \frac{F_1}{F} \qquad \text{und} \qquad \int_{s_1}^{s_2} \eta\, ds = L$$

wird

$$L\frac{d^2 s_1}{dt^2} + \frac{1}{2}(1 - \eta_2^2)\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + g\,R[\sin\varphi_1 + \cos\varphi_0 \sin\eta_2(\varphi_1 - \varphi_0) - \sin\varphi_0 \cos\eta_2(\varphi_1 - \varphi_0)] = 0\,. \tag{10}$$

Bei der Voraussetzung $F_1 =$ konst. und $F_2 =$ konst. gilt

$$L = \int_{s_1}^{s_2} \eta\, ds = \int_0^{s_{20}} \eta\, ds + \int_0^{s_1} \eta\, ds - \int_{s_{10}}^{s_2} \eta\, ds\,;$$

hierin ist

$$L_0 = \int_0^{s_{20}} \eta\, ds = \text{konst.}, \qquad \int_0^{s_1} \eta\, ds = s_1\,, \qquad \int_{s_{10}}^{s_2} \eta\, ds = \eta_2^2\, s_1\,.$$

Demnach erhält man

$$L = \int_{s_1}^{s_2} \eta\, ds = L_0 - (\eta_2^2 - 1)\, s_1\,,$$

wobei $L_0$ die reduzierte Länge der Flüssigkeitssäule in der Gleichgewichtslage bedeutet. Wenn man

die Beziehung $s_1 = R(\varphi_1 - \varphi_0)$ beachtet, so erhält man mit $\lambda = \eta_2^2 - 1$

$$(L_0 + \lambda R\varphi_0 - \lambda R\varphi_1)\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - \frac{1}{2}\lambda R\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right) + g\{\sin\varphi_1 + \sin[\eta_2\varphi_1 - (1+\eta_2)\varphi_0]\} = 0\,. \qquad (11)$$

Dies ist die gesuchte Bewegungsgleichung. Es läßt sich zeigen, daß die Beschleunigungen an je zwei zur Ruhelage symmetrischen Stellen verschiedene Werte haben.

Man kann (11) in die folgende Form umschreiben:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{L_0 + \lambda R\varphi_0}{2}\eta_2\dot{\varphi}_1^2 - \frac{\eta_2\lambda R\varphi_2}{2}\dot{\varphi}_1^2 - g\left[\eta_2\cos\varphi_1 + \cos(\eta_2\varphi_1 - (1+\eta_2)\varphi_0)\right]\right\} = 0 \qquad (12)$$

oder

$$\eta_2(L_0 + \lambda R\varphi_0 - \lambda R\varphi_1)\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + 2g\{\eta_2(\cos\varphi_{10} - \cos\varphi_1) + \cos[\eta_2\varphi_{10} - (1+\eta_2)\varphi_0] - \cos[\eta_2\varphi_1 - (1+\eta_2)\varphi_0]\} = 0\,, \qquad (13)$$

worin die Integrationskonstante durch die Randbedingung $d\varphi_1/dt = 0$ bei $\varphi_1 = \varphi_{10}$ bestimmt wurde. Nach Umformung erhält man

$$\sqrt{\frac{2g}{\eta_2}}\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \frac{\sqrt{L_0 + \lambda R\varphi_0 - \lambda R\varphi_1}}{\sqrt{\eta_2\cos\varphi_1 - \eta_2\cos\varphi_{10} + \cos[\eta_2\varphi_1 - (1+\eta_2)\varphi_0] - \cos[\eta_2\varphi_{10} - (1+\eta_2)\varphi_0]}}\,d\varphi_1\,. \qquad (14)$$

Der Integrand der rechten Seite von (14) ist eine ungerade Funktion von $\varphi_1$ und das bedeutet, daß die Schwingungszeit für entgegengesetzte Richtungen verschieden sind. Die Integration für praktische Fälle ist stets numerisch oder numerisch-graphisch auszuführen.

**4. Schwingung idealer Flüssigkeit in kreisbogenförmigen Röhren von konstantem Querschnitt.** Wenn man $\eta_2 = 1$ setzt und den dadurch belanglos gewordenen Index $\varphi$ fallen läßt, erhält man aus Gleichung (11) die Bewegungsgleichung für diesen Fall

$$L_0\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g[\sin\varphi + \sin(\varphi - 2\varphi_0)] = 0\,. \qquad (15)$$

Nach der ersten Integration ergibt sich

$$L_0\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2\varphi[\cos\varphi_a - \cos\varphi + \cos(\varphi_a - 2\varphi_0) - \cos(\varphi - 2\varphi_0)] = 0\,, \qquad (16)$$

wobei $\varphi_a$ der Auslenkungswinkel am Anfang mit $0$—$0_1$ als Bezugsebene bedeutet. Mit den Substitutionen

$$k = \sin\frac{\varphi_a - \varphi_0}{2}\,, \qquad \sin\frac{\varphi - \varphi_0}{2} = k\sin\psi$$

erhält man die Zeit einer Vollschwingung mit $M = \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}$.

$$T = 4\sqrt{\frac{L_0}{2g\cos\varphi_0}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{2g\cos\varphi_0}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2\sin^{2n}\frac{\varphi_a - \varphi_0}{2}\right). \qquad (17)$$

Für den Spezialfall $\varphi_0 = 0$, d. h. wenn die Enden der Flüssigkeitssäule in der Gleichgewichtslage gerade mit dem waagerechten Durchmesser des Kreises zusammenfallen, erhält man aus (17)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{2g}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2\sin^{2n}\frac{\varphi_a}{2}\right). \qquad (18)$$

Läßt man den Durchmesser des Kreises unbeschränkt wachsen, dann wird $\varphi_a = s_a/R = 0$ und damit aus (18)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{2g}}\,.$$

Das entspricht auch dem *Newton*schen Resultat für Flüssigkeitsschwingung in U-förmig gebogener Röhre mit konstantem Querschnitt.

Für kreisbogenförmige Röhren kann man noch $L_0 = R(\pi + 2\varphi_0)$ schreiben, und somit wird

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R(\pi + 2\varphi_0)}{2g\cos\varphi_0}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^{2n} \frac{\varphi_a - \varphi_0}{2}\right), \tag{19}$$

oder für den Sonderfall $\varphi_0 = 0$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\pi R}{2g}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^{2n} \frac{\varphi_a}{2}\right). \tag{20}$$

**5. Vergleich zwischen Schwingung eines mathematischen Pendels und einer idealen Flüssigkeit in kreisbogenförmigen Röhren von konstantem Querschnitt.** Die bisherigen Ergebnisse behalten ihre Gültigkeit ohne weiteres auch für solche Röhren bei, die mehrere Windungen besitzen. Man hat nur dann $L_0 = R(2\nu\pi + \pi + 2\varphi_0)$ zu setzen mit $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, und erhält damit die Schwingungsdauer für den allgemeinsten Fall

$$T_\nu = 2\pi \sqrt{\frac{R(2\nu\pi + \pi + 2\varphi_0)}{2g\cos\varphi_0}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^{2n} \frac{\varphi_a - \varphi_0}{2}\right). \tag{21}$$

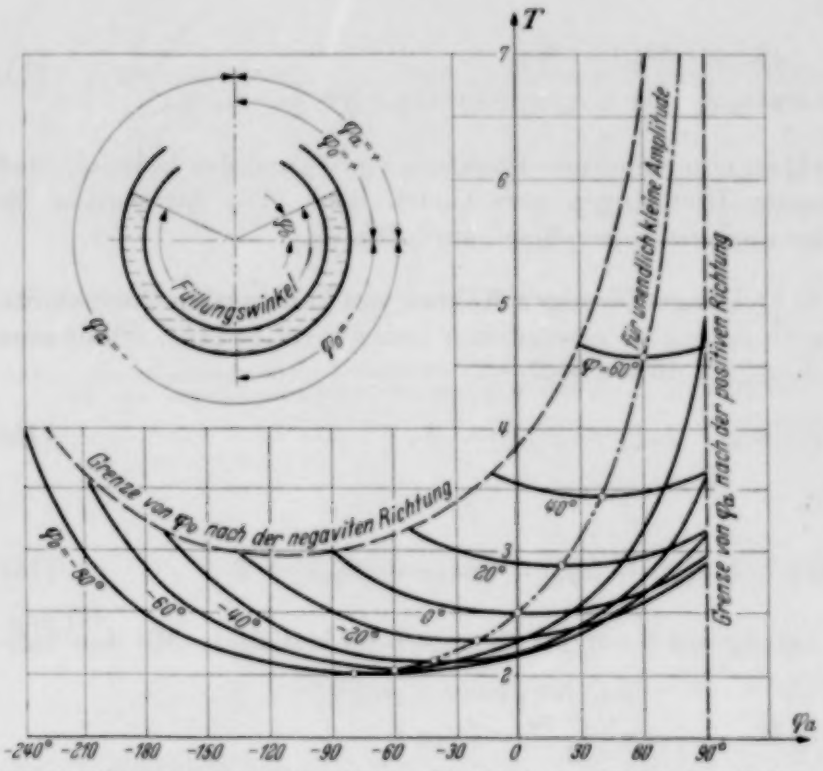


Abb. 3. Schwingungsdauer einer idealen Flüssigkeit in kreisförmiger Röhre von konstantem Querschnitt in Abhängigkeit von dem Winkel $\varphi_a$.

Selbstverständlich müssen die vollen Windungen der Röhre vollständig mit Flüssigkeit gefüllt sein.

Die in Abb. 3 aufgetragenen Kurven sind errechnet aus (21) mit $\nu = 0$. Da ein Abreißen der Strömung nicht auftreten soll, galt die Einschränkung $\varphi_a \leq \pi/2$. Mit wachsendem Fülllungswinkel wächst die Schwingungszeit und sinkt die maximal erreichbare Amplitude. Die Schwingungsdauer wächst auch mit der Zunahme von dem Ausschlag $\varphi_a$.

Wenn nur der Fall $\nu = 0$ betrachtet wird, so ist für die Flüssigkeitssäule

$$T_{fl} = 2\pi \sqrt{\frac{R(\pi + 2\varphi_0}{2g\cos\varphi_0}} \times \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^{2n} \frac{\varphi_a - \varphi_0}{2}\right) \tag{22}$$

und für das mathematische Pendel

$$T_{ma} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^{2n} \frac{\alpha}{2}\right), \tag{23}$$

wobei $2\alpha$ der vollständige Schwingungswinkel und $l$ die Pendellänge bedeuten. Der Winkel $\varphi_a - \varphi_0$ in (22) entspricht dem Winkel $\alpha = \varphi_a - \varphi_0$ in (23). Für den Vergleich soll deshalb $\alpha = \varphi_\alpha - \varphi_0$ gesetzt werden, d. h. die beiden Schwingungssysteme machen den gleichen Winkelausschlag. Es ist hiernach

$$T_{fl} \lesseqgtr T_{ma} \qquad \text{für} \qquad \left(\frac{\pi}{2} + \varphi_0\right) \lesseqgtr \frac{l}{R} \cos\varphi_0 . \tag{24}$$

Der interessanteste Fall von (24) ist

$$T_{fl} = T_{ma} \qquad \text{für} \qquad \xi = \frac{R}{l}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_0\right) = \cos\varphi_0 . \tag{25}$$

Die zweite Gleichung (25) ist in Abb. 4 mit $R/l$ als Parameter dargestellt. Die Schnittpunkte der Geraden mit der Kosinuslinie sind diejenigen $\varphi_0$-Werte, bei denen beide Schwingungssysteme gleiche Schwingungsdauer haben. Aus der oberen Grenze für $\xi$ folgt die Einschränkung

für das Verhältnis $l/R$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{l}{R} \geq \frac{\pi}{2} + \varphi_0 \qquad \text{mit} \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}. \tag{26}$$

Da $\left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi_0}\right)_{\varphi_0 = -\pi/2} = 1$ ist, besteht nur für $R < l$ die Möglichkeit, daß die beiden Schwingungssysteme gleiche Schwingungsdauer besitzen.

Für $\varphi_0 = 0$, $\varphi_a \to 0$ und $\alpha \to 0$ gelten die folgenden Beziehungen:

$$T_{fl} = 2\pi \sqrt{\frac{\pi R}{2g}}, \qquad T_{ma} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{27}$$

Es ergibt sich die überraschende Lösung

$$T_{fl} = T_{ma} \quad (\text{gültig für } \varphi_a \to 0,\ \alpha \to 0 \text{ und } \pi R = 2l). \tag{28}$$

Mit anderen Worten: bei sehr kleinen Schwingungsausschlägen besitzen beide Schwingungssysteme gleiche Schwingungsdauer, wenn die Pendellänge gleich dem vierten Teil des zugehörigen Kreisrohrumfangs ist. Die Pendellänge ist dabei gleich der Länge der halben Flüssigkeitssäule.

**6. Vergleich der Schwingungsdauer einer idealen Flüssigkeit in U-förmig gebogener und kreisbogenförmiger Röhre.** Aus $T = 2\pi \sqrt{L/2g}$ und (19) erhält man

$$R(\pi + 2\varphi_0) \leq \frac{R(\pi + 2\varphi_0)}{\cos \varphi_0}.$$

Mithin läßt sich schließen, daß, wenn die exakten Längen der Flüssigkeitssäule beider Schwingungssysteme einander gleich sind, die Schwingung in U-förmig gebogener Röhre wenigere Zeit benötigt. Für $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_a \to 0$ entsteht der Grenzfall, daß die Schwingung der Flüssigkeit in kreisbogenförmiger Röhre der Schwingung in U-förmiger Röhre gleich ist.

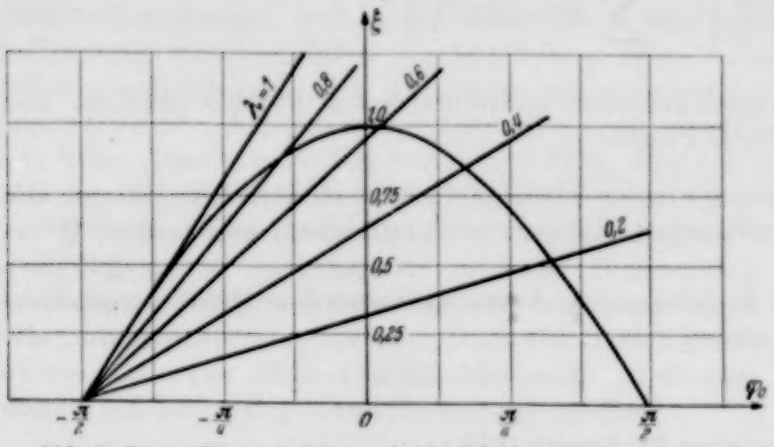


Abb. 4. Die $\varphi_0$-Werte, bei denen beide Schwingungssysteme gleiche Schwingungsdauer besitzen.

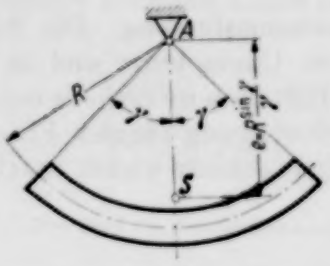


Abb. 5. Schwerpunkt eines Kreisringsegmentes.

**7. Vergleich zwischen der Schwingung eines physischen Pendels und einer idealen Flüssigkeit in kreisbogenförmigen Röhren von konstantem Querschnitt.** Die Schwingungsdauer eines physischen Pendels ist

$$T_{ph} = 2\pi \sqrt{\frac{J_a}{m g e}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^{2n} \frac{\varepsilon_0}{2}\right), \tag{29}$$

worin $J_a$ das Massenträgheitsmoment des Körpers um eine horizontale Drehachse durch einen Aufhängepunkt, $m$ die Masse des Körpers, $e$ der Abstand des Schwerpunktes vom Aufhängepunkt und $\varepsilon_0$ der maximale Ausschlagswinkel bedeuten.

Wenn der Körper die Form eines Ringsegmentes (Abb. 5) hat, dann wird $e = R \sin \gamma/\gamma$ und $J_a = mR^2$ sein, worin $\gamma$ die Hälfte des Zentriwinkels und $R$ der mittlere Radius des Ringsegmentes sind. Für diesen Fall kann man für (29) schreiben

$$T_{ph} = 2\pi \sqrt{\frac{R\gamma}{g \sin \gamma}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^{2n} \frac{\varepsilon_0}{2}\right). \tag{30}$$

Wenn dasselbe Ringsegment aus Flüssigkeit statt aus festem Stoff besteht, dann erhält man mit den Resultaten der vorgehenden Abschnitte

$$T_{fl} = 2\pi \sqrt{\frac{R(\pi + 2\varphi_0)}{2g \cos \varphi_0}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^{2n} \frac{\varepsilon_0}{2}\right). \tag{31}$$

Wenn man in Gleichung (31) $\pi + 2\varphi_0 = 2\gamma$ und $\cos\varphi_0 = \cos(\gamma - \pi/2) = \sin\gamma$ setzt, dann wird

$$T_{fl} = 2\pi\sqrt{\frac{R\gamma}{g\sin\gamma}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^{2n}\frac{\varepsilon_0}{2}\right). \tag{32}$$

Die Gleichungen (30) und (32) sind identisch, d. h. eine kreisförmige Flüssigkeitssäule und ein gleich großes Ringsegment aus festem Stoff schwingen mit gleicher Schwingungsdauer. Die Schwingungsdauer ist nicht von der Dicke sondern nur von dem Radius und der Bogenlänge des Ringsegmentes abhängig.

**8. Betrachtung der Grenzfälle.** Wenn man in Gleichung (31) $\varphi_0 \to +\pi/2$ gehen läßt, so wird

$$T_{fl,\varphi_0\to-\pi/2} = \infty\,. \tag{33}$$

Dieses Ergebnis ist plausibel, weil $\varphi_0 = +\pi/2$ eine Vollringröhre darstellt, die mit Flüssigkeit vollständig gefüllt ist. In diesem Grenzfall kann die Flüssigkeitssäule überhaupt nicht mehr schwingen, oder höchstens kann sie mit einer unendlich großen Schwingungszeit schwingen. Diese Betrachtung scheint natürlich auch richtig aber man darf nicht vergessen, daß man die Erscheinung stets im Sinne der Schwingung zu deuten hat. Gleichung (29) zeigt, daß bei einem Vollring der Schwerpunktsabstand $e$ im Nenner verschwindet und den Ausdruck zu Unendlichem führt. Vom Standpunkt der Schwingung gesehen ist dieses System gegen kleine Störungen indifferent, d. h. die für eine Schwingung notwendige Rückstellkraft ist in diesem Fall nicht mehr vorhanden, weil jetzt der Körper in seinem Schwerpunkt gestützt ist.

Läßt man anderseits in Gleichung (31) $\varphi_0 \to -\pi/2$ gehen, so wird

$$T_{fl,\varphi_0\to-\pi/2} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^2 \sin^{2n}\frac{\varphi_0 + \pi/2}{2}\right). \tag{34}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit der Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels überein. Die Masse konzentriert sich bei $\varphi_0 \to -\pi/2$ in einem Punkt.

**9. Zusammenfassung.** Die Schwingungszeit idealer Flüssigkeiten in elliptischen Röhren mit konstantem Querschnitt und in kreisbogenförmigen Röhren von ungleichen, konstanten Querschnitten läßt sich numerisch errechnen.

Die Schwingung idealer Flüssigkeit in kreisförmigen, kommunizierenden Röhren von konstantem Querschnitt wurde mathematisch streng gelöst.

(Eingegangen am 25. Januar 1952.)

Anschrift des Verfassers: *Hsien-Chih Liu*, Tsinan (China), Technische Hochschule.

# Nichtlineare Biegeschwingungen des axial-pulsierend belasteten Stabes.

Von F. Weidenhammer.

**1. Zielsetzung.** Zahlreiche neuere Arbeiten untersuchen die Stabilität einfacher Grundbewegungen elastischer Körper unter pulsierenden äußeren Lasten, und inzwischen ist von *E. Mettler* [1] eine sehr allgemeine Theorie dieser kinetischen Stabilitätsprobleme auf der Grundlage der Methode der kleinen Schwingungen geschaffen worden. Man kann bei diesen Problemen stets gewisse Frequenzen der pulsierenden Lasten abhängig von deren Amplitude angeben, die zu kinetischen Instabilitäten einer Grundbewegung führen. Die Theorie liefert für diese ausgezeichneten Werte von Frequenz und Amplitude streng nur die Aussage, daß die Grundbewegung instabil ist und sagt über die dann eintretende Bewegungsform selbst nichts aus. Als bevorzugtes Modell für diese ganze Problemklasse ist mehrfach der axial-pulsierend belastete Stab behandelt worden. In diesem Beispiel ist die Grundbewegung die reine Längsschwingung des Stabes in seiner Ausgangslage, und die Theorie sagt nicht befriedigend aus, in welche stabile Bewegungsform die genannte instabile Grundbewegung infolge einer kleinen Störung übergehen kann. Da die in der Technik vorkommenden pulsierenden Lasten klein gegen die statische Knicklast sind, wird man keine unbegrenzt wachsende Resonanzlösung erwarten, sondern eine Bewegung mit endlicher Amplitude vermuten. Es müssen daher gewisse stabile, noch unbekannte Nachbarbewegungen vorhanden sein. Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, einen Beitrag zur Auffindung dieser stabilen Nachbarbewegungen zu liefern. Dabei beschränkt sich die Untersuchung auf den technisch wichtigen, axial pulsierend belasteten Stab mit freiaufgestützt gelagerten Enden. An den Stabenden soll also der Stab in solcher Weise gelenkig gelagert sein, daß dort keine Querverschiebung und kein Biegemoment auftritt. Hingegen muß ein Lager in Längsrichtung verschieblich sein (vgl. Abb.1).

Da die mathematische Beschreibung der Nachbarbewegungen auf nichtlineare partielle Differentialgleichungen führt, darf man zunächst nur bescheidene Näherungsaussagen erwarten. Immerhin lassen sich gewisse Aussagen über endlich bleibende Stabbewegungen bei instabiler Grundbewegung machen.

Abb. 1. Der Stab im Koordinatensystem.

**2. Allgemeine Stabilitätsaussagen.** Die allgemeine Stabilitätstheorie gestattet für axial harmonisch pulsierend belastete Stäbe folgende Aussagen. Wenn die Frequenz $\omega$ der pulsierenden Axiallast weit unterhalb der tiefsten Eigenfrequenz der Längsschwingungen liegt, ist die Grundbewegung, das ist hier die reine Längsschwingung in der gestreckten Ausgangslage des Stabes, im allgemeinen stabil. Instabil kann dieser Grundzustand nur in der unmittelbaren Nähe diskreter Frequenzen $\omega_0$ werden. Und zwar findet man für den freiaufgestützten Stab nur Frequenzen in der Nähe von

$$\omega_0 = \frac{2\,\omega_i}{p} \qquad (p > 0 \text{ ganz}), \tag{1}$$

worin $\omega_i$ die $i$-te Biegeeigenfrequenz des Stabes bezeichnet. Diejenigen Anregungsfrequenzen $\omega_G$, welche gerade noch zu Instabilitäten führen, hängen von der Amplitude der pulsierenden Last ab. Sie schließen einen Frequenzbereich ein, den man Bereich erster Art der Ordnung $p$ nennt, wenn er von Frequenzen (1) ausgeht.

Der komplizierter gelagerte, z. B. eingespannte Stab hat übrigens weitere zusätzliche instabile Anregungsfrequenzen in der Nähe von

$$\omega_0 = \frac{\omega_i + \omega_j}{p} \qquad (p > 0 \text{ ganz},\ i \neq j). \tag{2}$$

Diese sogenannten Instabilitätsbereiche zweiter Art in der Nähe der Frequenzen (2) können bei dem freiaufgestützt gelagerten Stab nicht auftreten und bieten daher hier kein Interesse.

[1] *E. Mettler*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 418 und die dort angegebene Literatur.

Weiter entnimmt man der allgemeinen Theorie und zahlreichen Zahlenbeispielen, daß die Bereiche erster Art erster Ordnung die bei weitem größte praktische Bedeutung haben. Das folgt einmal daraus, daß diese Anregungsfrequenzen von jeweils etwa der doppelten Biegeeigenfrequenz eine besonders starke Instabilität ergeben, und daher die Dämpfung bei diesen Frequenzen nur geringere Wirkung hat als bei den anderen Bereichen. Zum anderen ist die Frequenzbreite dieser Bereiche die bei weitem größte. Man wird daher sein Hauptinteresse auf die Instabilitäten bei Längsschwingungen des Stabes mit Anregungsfrequenzen in der Nähe von $\omega_0 = 2\,\omega_i$ richten.

**3. Ausgangsgleichungen.** Die systematische und auch die näherungsweise Behandlung wird zweckmäßig über das *Hamilton*sche Prinzip geführt. Demnach verläuft die Stabbewegung so, daß

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (A_i + V - T)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A\,dt = 0 \tag{3}$$

wird. Hierin bedeuten $A_i$ die Formänderungsarbeit, $V$ das Potential der äußeren Kräfte, $T$ die Bewegungsenergie und $\delta A$ die virtuelle Arbeit der nichtkonservativen Dämpfungskräfte. Mit den in der technischen Biegelehre bewährten, vereinfachenden Annahmen ist [1]

$$\left.\begin{aligned} A_i &= \frac{EF}{2}\int_{-l/2}^{l/2}\left(u_x + \frac{w_x^2}{2}\right)^2 dx + \frac{EJ}{2}\int_{-l/2}^{l/2} w_{xx}^2\,dx\,, \qquad V = P(t)\,u\left(\frac{l}{2}\right), \\ T &= \frac{\mu}{2}\int_{-l/2}^{l/2}(u_t^2 + w_t^2)\,dx\,, \qquad\qquad \delta A = \int_{-l/2}^{l/2}\beta\,w_t\,\delta w\,dx\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Hierin bezeichnen (vgl. Abb.1)

| | |
|---|---|
| $x$ | = die Ortskoordinate, |
| $u(x,t)$, $w(x,t)$ | = die gesuchten Verschiebungskomponenten in Stablängsrichtung und quer zur Stabachse, |
| $t$ | = die Zeit, |
| $J$ = konst. | = das für die Biegeschwingung maßgebende Flächenträgheitsmoment, |
| $F$ = konst. | = die Querschnittsfläche des Stabes, |
| $\mu$ = konst. | = die Stabmasse je Längeneinheit, |
| $l$ | = die Stablänge, |
| $E$ | = den Elastizitätsmodul, |
| $P(t)$ | = $P_0 + P_1 \cos \omega t$ die rein harmonisch pulsierende Axiallast, |
| $\beta$ | = die Dämpfungskonstante der Biegeschwingungen. |

Der erste Summand in der Formänderungsenergie (4) rührt von der Dehnungsarbeit her. Nur durch diesen Energieanteil entsteht in der obigen Näherung für $A_i$ eine Kopplung der Längs- und Querbewegung des Stabes. Man überzeugt sich leicht aus der Anschauung, daß $\frac{1}{2} w_x^2$ nicht gegen $u_x$ vernachlässigt werden darf, wenn man die vorliegenden Instabilitätsfragen untersuchen will. Ein Element der Stabachse habe nämlich vor der Verformung die Länge $dx$, nachher $d\tilde{x}$. Dann ist die Dehnung: $\varepsilon_x = d\tilde{x}/dx - 1$ [2]. Aus der Abb. 2 liest man ferner $d\tilde{x}^2 = d(x+u)^2 + dw^2$ ab und findet mithin

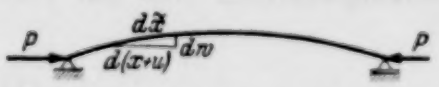


Abb. 2. Der Stab mit einem Längenelement der verformten Stabachse und seinen Komponenten.

$$\varepsilon_x = \sqrt{(1+u_x)^2 + w_x^2} - 1 \approx u_x + \frac{1}{2} w_x^2\,.$$

Die niedrigste Näherung verlangt also bereits die Mitführung des quadratischen Gliedes $\frac{1}{2} w_x^2$. Unter Voraussetzung des *Hooke*schen Gesetzes ergibt sich dann aus $\frac{E}{2}\int \varepsilon_x^2\,dV$ ($dV$ Volumelement) und damit der erste Summand von (4). Der zweite Summand von (4) rührt von der Formänderungsarbeit der Biegemomente her und kann bei kleinen Längskräften noch unabhängig von den Längsverschiebungen berechnet werden.

Die Voraussetzung der strengen Gültigkeit des *Hooke*schen (linearen) Elastizitätsgesetzes bedarf im vorliegenden Falle einer Rechtfertigung. Diese läßt sich bis zu einem gewissen Grade

[1] *E. Mettler*, Ing.-Arch. 13 (1942), S. 97.
[2] Vgl. z. B. *A. Pflüger*, Stabilitätsprobleme der Elastostatik, S. 10. Berlin 1950.

aus der Durchrechnung eines benachbarten Problemes gewinnen [1]. Es zeigt sich nämlich bei der Berechnung der freien nichtlinearen Biegeschwingungen eines beidseitig unverschieblich gelagerten Stabes, daß infolge eines nichtlinearen Werkstoffgesetzes im allgemeinen zwar die Koeffizienten der nichtlinearen Schwingungsgleichung etwas andere Werte annehmen, daß jedoch bei normalen technischen Werkstoffen und Abmessungen der Charakter der Schwingungsgleichung nicht geändert wird, so daß keine andersartigen Phänomene auftreten, wie sie der vereinfachte Ansatz (4) liefert. Dieser Ansatz soll daher auch für den pulsierend belasteten Stab beibehalten werden.

Aus dem *Hamilton*schen Prinzip (3) lassen sich nun die gekoppelten Bewegungsgleichungen für die Längs- und Querbewegungen des Stabes herleiten. Man erhält gekoppelte nichtlineare partielle Differentialgleichungen mit nichtlinearen und wegen der pulsierenden Längskraft zeitabhängigen Randbedingungen.

Im einzelnen findet man für die Längsbewegung

$$-EF\left(u_x+\frac{w_x^2}{2}\right)_x+\mu u_{tt}=0 \tag{5}$$

mit

$$u=0 \quad \text{für} \quad x=-l/2\,, \tag{5'}$$

$$EF\left(u_x+\frac{w_x^2}{2}\right)+P(t)=0 \quad \text{für} \quad x=l/2\,. \tag{5''}$$

Für die Querverschiebung gilt

$$-EF\left[w_x\left(u_x+\frac{w_x^2}{2}\right)\right]_x+EJ\,w_{xxxx}+\beta w_t+\mu w_{tt}=0 \tag{6}$$

mit

$$w=w_{xx}=0 \quad \text{für} \quad x=\pm l/2\,. \tag{6'}$$

Die strenge Lösung der vorstehenden Differentialgleichungen scheint kaum möglich zu sein. Man wird daher zum näherungsweisen Studium des zeitlichen Verlaufes der Bewegungen zweckmäßig die schon vielfach bewährten „gemischten *Ritz*-Ansätze“ [2]

$$v(x,t)=\sum_{i=1}^{N} Y_i(x)\,U_i(t)\,, \tag{7}$$

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{N} X_i(x)\,W_i(t) \tag{8}$$

direkt in (3) einführen. In (7) und (8) sind die (dimensionslosen) Ortsfunktionen $Y_i$ und $X_i$ so zu wählen, daß alle wesentlichen Randbedingungen für alle Zeit erfüllt sind. Zur Erleichterung der Zahlenrechnung werden $Y_i$ und $X_i$ als Funktionen der dimensionslosen Ortskoordinate

$$\xi=\frac{x}{l} \tag{9}$$

durch die Bedingungen

$$\int_{-1/2}^{1/2} X_i^2\,d\xi=1\,, \qquad \int_{-1/2}^{1/2} Y_i^2\,d\xi=1 \tag{10}$$

normiert.

Man hofft, in den Ansätzen (7) und (8) mit einer möglichst kleinen Zahl $N$ der Ansatzglieder für eine brauchbare Näherung auszukommen. Zur Erfüllung von (3) hat man eine Variation auszuführen, und diese führt auf nichtlineare *Euler*sche Gleichungen für die Zeitfunktionen $U_i$ und $W_i$. Durch die Ansätze (7) und (8) kommt man so von partiellen zu nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen, über deren Lösungen man gewisse Aussagen machen kann.

Um in der weiteren Rechnung weitgehend unabhängig von den speziellen Stababmessungen zu werden, sollen zunächst geeignete Parameter und Veränderliche eingeführt werden. Außer der dimensionslosen Ortskoordinate $\xi$ und einer dimensionslosen Zeitzählung

$$s=\omega t \tag{11}$$

---

[1] *F. Weidenhammer*, Z. angew. Math. Mech., 32 (1952) Heft 8/9.

[2] *L. Collatz*, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, S. 334. Berlin 1951.

werden auch die Längs- und Querverschiebungszeitfunktionen in (7) und (8) durch

$$\bar{U} = U/l\,, \qquad \bar{W} = W/l \tag{12}$$

dimensionslos eingeführt. Durch

$$\omega = \varkappa \sqrt{\frac{EJ}{\mu l^4}} = \varkappa f \tag{13}$$

wird weiter eine dimensionslose „Längsanregungsfrequenz" $\varkappa$ in Einheiten $f = \sqrt{EJ/\mu l^4}$ der Biegeschwingungsfrequenzen gemessen. Die $i$-te Biegeeigenfrequenz $\omega_i$ wird entsprechend durch

$$\omega_i = \varkappa_i f \tag{14}$$

bezeichnet. In der pulsierenden Axialkraft $P(t) = P_0 + P_1 \cos s$ werden die ruhende Vorlast $P_0$ und die Amplitude der pulsierenden Last $P_1$ in bezug auf die (kleinste) *Euler*sche Knicklast $P_E$ des Stabes für gleiche Lagerung gemessen:

$$\varepsilon_0 = \frac{P_0}{P_E}\,, \qquad \varepsilon = \frac{P_1}{P_E}\,. \tag{15}$$

Bei technischen Aufgabenstellungen ist $\varepsilon_0$ und $\varepsilon$ üblicherweise klein gegen 1. Für die statische Vorlast $P_0$ wird zweckmäßig auch noch der dimensionslose Parameter

$$2\,\alpha^2 = \frac{l^2 P_0}{EJ} = \pi^2 \varepsilon_0 \tag{16}$$

verwendet. Auch die Dämpfungskonstante $\beta$ kann durch das mit der jeweiligen $i$-ten Biegeeigenschwingung gemessene logarithmische Dekrement dimensionslos ausgedrückt werden:

$$\vartheta_i = \frac{\beta \pi}{2 \mu \varkappa_i f}\,. \tag{17}$$

Der Schlankheitsgrad geht ebenfalls in die Rechnung ein und wird wie üblich mit

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{J/F}}$$

bezeichnet.

Den Ansatz (7) für die Längsschwingung $u(\xi, s)$ kann man eingliedrig und besonders einfach wählen, wenn man voraussetzt, daß die Längsanregungsfrequenz $\varkappa$ weit unterhalb der ersten Längseigenfrequenz bleibt. Die Längsresonanz wird dann durch eine solche Rechnung nicht mit erfaßt werden können. Unter dieser Einschränkung wird sich im Stab ein nennenswert örtlich verschiedener Längsspannungszustand nicht ausbilden, und man kann dann (7) hinsichtlich der Ortsvariablen einfach linear ansetzen. In dieser Näherung hängt die Längsdehnung $u_\xi/l$ und damit die Längskraft allein von der Zeit und nicht vom Ort ab. Auf die strenge Erfüllung der komplizierten nichtlinearen und zeitabhängigen Randbedingung (5″) wird man verzichten und deren näherungsweise Erfüllung von der Lösung des Variationsproblemes (3) fordern. Der Ansatz

$$u(\xi, s) = \sqrt{3}\left(\xi + \frac{1}{2}\right) l\, \bar{U}(s) \tag{18}$$

erfüllt also nur die Randbedingung (5′) und nicht (5″). Der Faktor $\sqrt{3}$ ist gemäß (9) als Normierungskonstante zugefügt worden. Die Zeitfunktion $\bar{U}(s)$ wird später als Lösung einer Variationsaufgabe zu berechnen sein.

Als Ortsfunktionen $X_i$ für den Ansatz (8) bieten sich die Eigenfunktionen (Eigenschwingungsformen) des statisch gedrückten und ungedämpft schwingenden Stabes an. Sie sind also aus den Lösungen der Schwingungsgleichung des gedrückten Stabes

$$w_{\xi\xi\xi\xi} + 2\,\alpha^2 w_{\xi\xi} + \varkappa^2 w_{ss} = 0 \tag{19}$$

mit den Randbedingungen (6′) zu gewinnen. Der Produktansatz $w = X(\xi) T(s)$ führt auf das Eigenwertproblem

$$X_i^{\mathrm{IV}} + 2\,\alpha^2 X_i'' - \varkappa_i^2 X_i = 0 \tag{20}$$

mit den Randbedingungen

$$X_i\left(\pm\frac{1}{2}\right) = X_i''\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0 \tag{20′}$$

und eine hier nicht interessierende Schwingungsgleichung. In (19) und (20) sind die Abkürzungen

(10) bis (16) verwandt und ein Akzent bezeichnet Differentiation nach $\xi$. Die orthogonalen und durch (10) normierten Eigenfunktionen lassen sich leicht angeben. Mit ihnen sind im weiteren einige Zahlenwerte zu berechnen:

$$\psi_{ij} = \int_{-1/2}^{1/2} X_i' X_j' \, d\xi \,, \tag{21}$$

$$\chi_{ijkl} = \int_{-1/2}^{1/2} X_i' X_j' X_k' X_l' \, d\xi \,, \tag{22}$$

$$\varkappa_{ij}^2 = \int_{-1/2}^{1/2} X_i'' X_j'' \, d\xi \,. \tag{23}$$

Zwischen (21) und (23) läßt sich aus (20) durch geeignete Integrationen über die Stablänge die Beziehung

$$\varkappa_{ij}^2 - 2\,\alpha^2 \psi_{ij} = e_{ij} \varkappa_i^2 \qquad \text{mit} \qquad e_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \,, \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases} \tag{24}$$

ableiten. Damit ist auch der Ansatz (8) festgelegt. Er erfüllt die Randbedingungen für alle Zeit.

Nach diesen Vorbereitungen können (7) und (8) in (3) eingesetzt werden. Nach Ausführung der Integrationen über $\xi$ bleibt dann eine Variationsaufgabe für die Zeitfunktionen $\overline{U}$ und $\overline{W}_i$ allein übrig:

$$\delta \left\{ \int_{s_1}^{s_2} \left( \frac{1}{2}\, 3\, \lambda^2\, \overline{U}^2 + \frac{\lambda^2}{2} \sqrt{3}\, \overline{U} \sum_{i,j=1}^{N} \psi_{ij}\, \overline{W}_i\, \overline{W}_j + \frac{\lambda^2}{8} \sum_{i,j,k,l=1}^{N} \chi_{ijkl}\, \overline{W}_i\, \overline{W}_j\, \overline{W}_k\, \overline{W}_l + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \varkappa_{ij}^2\, \overline{W}_i\, \overline{W}_j + \right. \right.$$
$$\left. \left. + P(s) \frac{\sqrt{3}\, 2\alpha^2}{P_0}\, \overline{U} - \frac{1}{2}\, \varkappa^2\, \overline{U}^2 - \frac{1}{2}\, \varkappa^2 \sum_{i=1}^{N} \overline{W}_i^2 \right) ds \right\} + \int_{s_1}^{s_2} \left( \frac{2\varkappa}{\pi} \sum_{i=1}^{N} \varkappa_i\, \vartheta_j\, \dot{\overline{W}}_i \delta \overline{W}_i \right) ds = 0 \,.$$

Hierin bezeichnen Punkte die Ableitung nach der dimensionslosen Zeit $s$. Die hierzu gehörenden *Euler*schen Gleichungen sind ein inhomogenes System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\varkappa^2\, \overline{U}'' + 3\,\lambda^2\, \overline{U} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, \lambda^2 \sum_{i,j=1}^{N} \psi_{ij}\, \overline{W}_i\, \overline{W}_j = -\, P(s)\, \frac{\sqrt{3}\, 2\alpha^2}{P_0} \,, \tag{25}$$

$$\varkappa^2\, \ddot{\overline{W}}_i + \frac{2}{\pi}\, \vartheta_i \varkappa_i \varkappa\, \dot{\overline{W}}_i + \sum_{j=1}^{N} \varkappa_{ij}^2\, \overline{W}_j + \sqrt{3}\lambda^2\, \overline{U} \sum_{j=1}^{N} \psi_{ij}\, \overline{W}_j + \frac{\lambda^2}{2} \sum_{j,k,l=1}^{N} \chi_{ijkl}\, \overline{W}_j\, \overline{W}_k\, \overline{W}_l = 0 \tag{26}$$
$$(i = 1, 2, \ldots N) \,.$$

Die Gleichungen (25), (26) enthalten von den speziellen Stababmessungen nur noch den Schlankheitsgrad $\lambda$, die *Euler*sche Knicklast $P_E$, die Dämpfungskonstante in den $\vartheta_i$ und die Zahlenfaktoren (21), (22), (23), die durch Integrationen aus den Eigenfunktionen $X_i$ gebildet sind. Um die Lösungen der Gleichungen (25), (26) abhängig von Amplitude und Frequenz der harmonisch pulsierenden Längslast $P(s)$ untersuchen zu können, müssen die Zahlenwerte (21), (22), (23) jetzt angegeben werden.

Zuvor soll jedoch darauf hingewiesen werden, daß die Bewegungsgleichungen (25) und (26) nicht nur für den speziell freiaufgestützt gelagerten Stab gelten. Vermeidet man in (16) die Bezugnahme auf die *Euler*sche Knicklast und rechnet dementsprechend mit dem dimensionslosen Parameter $2\,\alpha^2$ gemäß (16), so gilt das Eigenwertproblem (20) mit entsprechend abgeänderten Randbedingungen auch für andere Lagerungsarten. Z. B. ist für den beidseitig eingespannten Stab nur $X_i''\left(\pm \frac{1}{2}\right)$ durch $X_i'\left(\pm \frac{1}{2}\right)$ zu ersetzen. Hingegen bleibt die Eigenwertgleichung (24) bestehen. Allerdings haben die Koeffizienten (21), (22) und (23) nicht mehr so einfache Eigenschaften wie im vorliegenden Falle. Insbesondere reduziert sich die Matrix der Koeffizienten $\psi_{ij}$ nicht mehr auf eine Diagonalmatrix (vgl. (29)), was weitreichende Konsequenzen für die Behandlung dieses allgemeineren Stabproblemes hat.

Für den freiaufgestützten Stab dagegen wird das Eigenwertproblem (20), (20′) zur Bestimmung der Koordinatenfunktionen besonders einfach. Man findet

$$X_i = \sqrt{2} \sin i\pi\left(\xi + 1/2\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{27}$$

und die Eigenwerte (Biegeeigenfrequenzen)

$$\varkappa_i = i^2 \pi^2 \sqrt{1 - \varepsilon_0 / i^2}\,, \tag{28}$$

wenn $2\alpha^2$ mit seinem Wert (16) eingesetzt wird. Auch die Zahlenwerte (21) und (23) lassen sich leicht ganz allgemein angeben:

$$\psi_{ij} = 0 \quad (i \neq j)\,. \qquad \psi_{ii} = i^2 \pi^2\,, \tag{29}$$

$$\varkappa_{ij}^2 = 0 \quad (i \neq j)\,. \qquad \varkappa_{ii}^2 = i^4 \pi^4\,. \tag{30}$$

Zur Berechnung der $\chi_{ijkl}$ hat man nach (22) ebenfalls nur bestimmte Integrale auszuwerten. Für einen zweigliedrigen Ansatz (8) mit den ersten beiden Eigenfunktionen (27) braucht man z. B. nur die Zahlenwerte

$$\chi_{1111} = 4\pi^4 \cdot \frac{3}{8} \cdot 1^4\,, \qquad \chi_{1122} = 4\pi^4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1^2 2^2\,, \qquad \chi_{2222} = 4\pi^4 \cdot \frac{3}{8} \cdot 2^4\,, \tag{31}$$

da die $\chi_{1222} = \chi_{2221} = 0$ sind. Allgemein gilt

$$\chi_{iiii} - \psi_{ii}^2 = \frac{\pi^4}{2}\, i^4 > 0\,, \tag{32}$$

was später gebraucht werden wird. Damit sind alle Gleichungskonstanten in (25) und (26) allgemein gefunden.

**4. Beschreibung der Biegeschwingungen durch ergänzte Mathieu-Gleichung.** a) Aufstellung der Bewegungsgleichung. Einen ersten Einblick in die durch die Gleichungen (25), (26) beschriebenen Stabbewegungen kann man gewinnen, wenn man sich auf einen eingliedrigen Ansatz (8) für die Querverschiebung beschränkt. Aus den dann verbleibenden beiden Gleichungen kann man in mechanisch sinnvoller Näherung eine einzige Differentialgleichung für die insbesondere interessierende Verschiebung $\overline{W}_i$ herleiten, wenn das Trägheitsglied $\varkappa^2 \overline{U}''$ gegen das Rückstellglied $3\lambda^2 \overline{U}$ in (25) vernachlässigt werden darf. Dann wird also die Längsbewegung etwa statisch betrachtet, und es muß auf dieser Stufe der Näherung die Längsanregungsfrequenz $\varkappa$ sehr klein gegenüber der in (25) auftretenden ersten Längseigenfrequenz $\varkappa_L \approx \sqrt{3}\lambda$ sein. Dies ist offenbar der Fall, wie man aus dem Vergleich der Vorzahlen $\varkappa^2$ und $3\lambda^2$ für in Betracht kommende Werte der Anregungsfrequenz $\varkappa$ ersehen kann. Von den Bereichen erster Art sind ja diejenigen der ersten Ordnung ($p = 1$) besonders interessant und für technische Stäbe ist die verlangte Ungleichung

$$\varkappa_0 = \frac{2\varkappa_i}{p} = \frac{2\pi^2}{p} << \sqrt{3}\,\lambda$$

auch schon für $p = 1$ sicher erfüllt. Es ist also eine sinnvolle Näherung, $\overline{U}$ aus (25) rein statisch zu berechnen und in (26) einzutragen. Daher findet man unter Verwendung von (24) für einen eingliedrigen Ansatz mit der $i$-ten Eigenfunktion:

$$\varkappa^2 W_i'' + \frac{2}{\pi}\,\vartheta_i \varkappa_i \varkappa W_i' + \varkappa_i^2 W_i - \varepsilon \pi^2 \psi_{ii} \cos s W_i + \frac{F}{2J}\,(\chi_{iiii} - \psi_{ii}^2) W_i^3 = 0\,. \tag{33}$$

In die nunmehr homogene Gleichung (33) ist wieder die ursprüngliche Verschiebungsfunktion $W_i$ mit der Dimension einer Länge eingeführt worden, um für die Zahlenrechnung unbequeme Faktoren $\lambda^2$ zu vermeiden. An diese ergänzte *Mathieu*-Gleichung knüpfen alle weiteren Rechnungen an. Sie kann als Bewegungsgleichung eines gedämpften Einmassenschwingers mit periodisch veränderlicher Federsteife aufgefaßt werden. Dabei ist jedoch die Federkennlinie überlinear, und zwar hat das kubische Glied gemäß (32) einen stets positiven Vorfaktor und entspricht so formal einer mit wachsendem Ausschlag härter werdenden Feder. Man wird daher endlich bleibende Schwingungen erwarten dürfen.

Die nichtlineare Differentialgleichung (33) ist in der Literatur schon gelegentlich aufgetreten. Ihre allgemeine Lösung ist nicht bekannt. Hingegen sind spezielle periodische Lösungen von *N. W. McLachlan* [1] mit einem zweigliedrigen Fourieransatz berechnet worden. Experimente scheinen ebenfalls in Einzelfällen für die Existenz dieser Lösungen gesprochen zu haben. So fanden *I. Utida* und *K. Sezawa* [2] bei experimentellen Untersuchungen eines axial pulsierend

[1] *N. W. McLachlan*, Ordinary non-linear Differential Equations in engineering and physical Sciences, S. 122. Oxford 1950.

[2] *I. Utida* u. *K. Sezawa*, Rep. aeronaut. Res. Inst., Tokyo Imp. Univ. 15 (1940), S. 193. Leider ist das dort beschriebene Experiment nur sehr schwer theoretisch auszuwerten. Für die entsprechenden Saiten-

belasteten Stabes mit Endmasse ebenfalls periodische Querschwingungen mit Frequenz-Amplituden-Abhängigkeiten, wie sie nur bei nichtlinearen Schwingungen möglich sind. Da auch *N. Minorsky*[1] eine stationäre Lösung fand, liegt es nahe, nach stabilen periodischen Querschwingungen zu suchen, wenn die gestreckte Gleichgewichtslage des Stabes durch Anregungsfrequenzen in der Nähe von $\varkappa_0 = 2\varkappa_i/p$ instabil geworden ist. Im weiteren wird zunächst das Dämpfungsglied in (33) vernachlässigt. Die Berechnung der Wirkung dämpfender Kräfte wird in Abschn. 3e in gewissem Umfange nachgeholt.

b) Das Verzweigungsproblem. Es soll jetzt durch eine einfache Anwendung der Integralgleichungstheorie von *E. Schmidt*[2] gezeigt werden, daß es zur gestreckten Stablage für Längsschwingungen kleiner Amplitude benachbarte kleine Querschwingungen gibt, die halb- oder ganzperiodisch in bezug auf die Längsanregung sind. Es ist zweckmäßig, hier die Bewegungsgleichung (33) mit den Abkürzungen

$$\gamma = \frac{F}{2\varkappa_0^2 J}(\chi_{iiii} - \psi_{ii}^3) \tag{34}$$

und

$$v(s) = \varepsilon \frac{\pi^2 \psi_i}{\varkappa_0^2} \cos s = \bar{\varepsilon} \cos s \tag{35}$$

in der Form

$$W'' + \left(\frac{\varkappa_i}{\varkappa_0}\right)^2 W - vW + \gamma W^3 = 0 \tag{36}$$

zu schreiben, wobei von der Wirkung dämpfender Kräfte ganz abgesehen wird. Ferner wird die Bewegungszeitfunktion $W$ ohne den Index $i$ geschrieben und der Anregungsfrequenz $\varkappa$ werden spezielle Werte $\varkappa_0$ beigelegt. In (36) rührt $v(s)$ von der erzwungenen Längsschwingung her und ist klein mit $\varepsilon = P_1/P_E$. Die von der Theorie geforderte Beschränkung auf kleine Amplituden von $v$ und $W$ ist bei in der Technik vorkommenden Schwingungen daher von selbst gegeben. Unter diesen Voraussetzungen wird sich zeigen, daß Stabquerschwingungen nur bei den Frequenzen (1) möglich sind. Dies ist jedoch gerade der besonders interessante Fall, in dem die Grundbewegung instabil ist und andere stabile Bewegungsformen nicht bekannt sind.

Zunächst werden beispielsweise nur spezielle periodische Lösungen von (36) betrachtet, welche durch die „Randbedingungen"

$$W(-\pi) = W(+\pi) = 0 \tag{37}$$

festgelegt werden. Dann ist die Integralgleichung

$$W(s) - \left(\frac{\varkappa_i}{\varkappa_0}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} K(s,t)\, W(s)\, dt = -\int_{-\pi}^{\pi} K(s,t)\, v(t)\, W(t)\, dt + \gamma \int_{-\pi}^{\pi} K(s,t)\, W^3(t)\, dt \tag{38}$$

mit (36) gleichwertig, wenn

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\pi} \frac{\cos ns/2 \cos nt/2}{\left(\frac{n}{2}\right)^2} + \sum_{m=2}^{\infty}{}' \frac{1}{\pi} \frac{\sin ms/2 \sin mt/2}{\left(\frac{m}{2}\right)^2} \qquad \begin{pmatrix} n \text{ ungerade} \\ m \text{ gerade} \end{pmatrix} \tag{39}$$

ist. Von den Lösungen der Integralgleichung (38), die den Randbedingungen (37) genügen, sollen zunächst nur die in bezug auf die Zeitvariable geraden Lösungen berechnet werden. Dann ist es bei dem vorliegenden Problem zulässig, die zweite Summe in (39) mit den ungeraden Eigenfunktionen des Kernes fortzulassen, was zur Vereinfachung der Formeln schon hier geschehen soll. Von der Berechtigung dieser Auslassung kann man sich durch Mitführung der ungeraden Kernfunktionen nach einiger Rechnung überzeugen. Man ersieht aber auch aus der äquivalenten Differentialgleichung (36) unmittelbar, daß sowohl gerade periodische Lösungen als auch ungerade Lösungen je für sich allein bestehen können. Die antimetrischen Eigenfunktionen des Kernes (39) können also nicht in die Lösung eintreten und fallen auch tatsächlich in einer ausführlichen Rechnung infolge der Orthogonalität der Eigenfunktionen wieder heraus. Gesucht sind nun Nachbarbewegungen $W$ zur Grundlösung $W \equiv 0$ und $v \equiv 0$, wie sie durch (37) und (38)

schwingungen vgl. *C. V. Raman*, Physic. Rev. 35 (1912), S. 449 (zitiert nach Beibl. Ann. Physik 37 (1913), S. 1372).

[1] *N. Minorsky*, C. R. Acad. Sc. Paris 231 (1950), S. 1417.

[2] *E. Schmidt*, Math. Ann. 65 (1908), S. 370; vgl. auch *R. Iglisch*, Mh. Math. Physik 27 (1930), S. 325, über das Duffingsche Problem.

beschrieben werden. Nach *E. Schmidt* sind diejenigen Werte $(\varkappa_i/\varkappa_0)^2$, die Eigenwerte der linken Seite von (38) und (37) sind, Verzweigungsstellen, da in ihrer Nähe mehrere Lösungen existieren können. Diese Verzweigungsstellen

$$\varkappa_i = \frac{n}{2}\,\varkappa_0 \qquad (n \text{ ganz})$$

sind also nach (1) gerade die kritischen Frequenzen der Bereiche erster Art. Dies ist hier zwar nur für ungerade $n$ hergeleitet worden, kann aber durch andere Lösungstypen mit anderen Randbedingungen als (37) allgemein bestätigt werden.

Die Verzweigungslösungen selbst sollen hier nur für die Randbedingungen (37) und den wichtigsten Bereich erster Ordnung für $\varkappa_0 = 2\,\varkappa_i$ aufgesucht werden. Nach *E. Schmidt* hat man zu dem Zweck $K(s,t)$ von der zugehörigen ersten Eigenfunktion zu befreien. Nimmt man als Transformationsfunktionen $p_1$, $q_1$ im wesentlichen die normierten Eigenfunktionen selber, so wird

$$E(s,t) = K(s,t) - \frac{p_1(s)\,q_1(t)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sum_{n=3}^{\infty}{}' \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos ns/2\,\cos nt/2}{\left(\frac{n}{2}\right)^2} \qquad (n \text{ ungerade}) \qquad (40)$$

und damit

$$W(s) - \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} E(s,t)\,W(t)\,dt = z\cos\frac{s}{2} - \int_{-\pi}^{\pi} K(s,t)\,v(t)\,W(t)\,dt + \gamma\int_{-\pi}^{\pi} K(s,t)\,W^3(t)\,dt\,. \qquad (41)$$

Mit

$$z = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W(t)\cos\frac{t}{2}\,dt \qquad (42)$$

muß man nun die Verzweigungsgleichung als algebraische Gleichung für $z$ bestimmen. Da die linke Seite in (41) keine Null-Lösung mehr hat, läßt sich zur Bestimmung von $W(s)$ eine (Pseudo-) Resolvente $R(s,t)$ aus [1]

$$R(s,t) - E(s,t) - \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} E(s,\tau)\,R(\tau,t)\,d\tau = 0 \qquad (43)$$

als

$$R(s,t) = \sum_{n=3}^{\infty}{}' \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos ns/2\,\cos nt/2}{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \qquad (n \text{ ungerade})$$

finden. Dann kann man (41) als inhomogen auffassen:

$$W(s) - \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} E(s,t)\,W(t)\,dt = F(s)$$

und durch

$$F(s) + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} R(s,t)\,F(t)\,dt = W(s)$$

auflösen. Im einzelnen liefert diese Scheinauflösung

$$W(s) = z\cos\frac{s}{2} - \int_{-\pi}^{\pi} G(s,t)\,v(t)\,W(t)\,dt + \gamma\int_{-\pi}^{\pi} G(s,t)\,W^3(t)\,dt\,, \qquad (44)$$

wenn mit dem *Kronecker*symbol

$$e_{n1} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n \neq 1 \end{cases}$$

[1] Vgl. z. B. *W. Schmeidler*, Integralgleichungen, Band I, S. 286. Leipzig 1950.

$G(s,t)$ zur Abkürzung für

$$G(s,t) = K(s,t) + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} R(s,\tau)\,K(\tau,t)\,d\tau = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\cos ns/2\,\cos nt/2}{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - (1-e_{n1})\left(\frac{1}{2}\right)^2} \qquad (n \text{ ungerade})$$

gesetzt wird. Von $W_1 = z\cos\frac{s}{2}$ ausgehend, läßt sich $W(s)$ für hinreichend kleine Maximalbeträge von $v$ und $W$ durch schrittweise Annäherung finden, wofür sich ein Konvergenzbeweis bei *L. Lichtenstein* [1] findet. Die Verzweigungsgleichungen findet man nach *E. Schmidt* am einfachsten durch folgendes Iterationsverfahren. Die erste Näherung

$$W_1 = z\cos\frac{s}{2}$$

werde mit noch unbestimmtem $z$ in (44) eingeführt und so eine zweite Näherung bestimmt:

$$W(s) \approx z\cos\frac{s}{2} - \int_{-\pi}^{\pi} G(s,t)\,\bar{\varepsilon}\cos t\,z\cos\frac{t}{2}\,dt + \gamma\int_{-\pi}^{\pi} G(s,t)\,z^3\cos^3\frac{t}{2}\,dt\,.$$

Hiervon werden nur die quadratischen Glieder $\bar{\varepsilon}\,z$, $\bar{\varepsilon}^2$ und $z^2$ beibehalten und damit $W_2$ gebildet:

$$W_2 = -2\,\bar{\varepsilon}\,z\cos\frac{s}{2} - \frac{\bar{\varepsilon}z}{4}\cos\frac{3}{2}s\,.$$

Mit der Summe von $W_1$ und $W_2$ bildet man ebenso eine nächste Näherung, von der man nur kubische Glieder beibehält. Dann ist nach diesem Schritt genähert:

$$W(s) \approx \cos\frac{s}{2}\left[z - 2\,\bar{\varepsilon}\,z + \frac{9}{2}\,\bar{\varepsilon}^2 z + 3\,\gamma\,z^3\right] + \cos\frac{3}{2}s\,[\ldots] + \cdots,$$

worin alle weiteren Summanden für die Aufstellung der Verzweigungsgleichung nicht interessieren. Diese ergibt sich aus (42) bis auf höhere Glieder zu

$$z = z - 2\,\bar{\varepsilon}\,z + \frac{9}{2}\,z\bar{\varepsilon}^2 + 3\,\gamma\,z^3 + \cdots. \qquad (45)$$

Für genügend kleine $\bar{\varepsilon}$ und $z$ gibt es genau drei reelle Wurzeln und damit auch ebenso viele Lösungen $W(s)$, die die Periodizitätsbedingungen (37) erfüllen. Sie gehören zu den Werten

$$z_1 = 0\,, \qquad z_2 = \sqrt{\frac{2\bar{\varepsilon}}{3\gamma}} + 0\left(\bar{\varepsilon}\sqrt{\bar{\varepsilon}}\right), \qquad z_3 = -z_2\,. \qquad (46)$$

Außer der trivialen Grundbewegung $W \equiv 0$ sind demnach noch die beiden periodischen Nachbarbewegungen

$$W(s) = \pm\sqrt{\frac{2\bar{\varepsilon}}{3\gamma}}\cos\frac{s}{2} + \cdots$$

möglich, worin das Doppelvorzeichen selbstverständlich ist, da die Bewegungsgleichung (36) nur ungerade Funktionen von $W$ enthält und homogen ist.

Auf ganz entsprechende Weise können die Verzweigungsgleichungen für Bereiche höherer Ordnungszahlen und für ungerade Lösungsfunktionen aufgestellt werden. Wenn jedoch die betrachteten Querschwingungen um eine verschobene Mittellage erfolgen und demnach das Zeitintegral $\int W(s)\,ds$ über eine Periode nicht verschwindet, ist der Lösungsweg über die Integralgleichung (38) nicht ohne weiteres gangbar [2]. Da man aber schon bei Bereichen zweiter Ordnung wegen der entsprechenden Eigenschaften der *Mathieu*schen Funktion $ce_2$ derartige verschobene Schwingungen zu erwarten hat, ist die Integralgleichungstheorie in dieser einfachen Form für die weitere Untersuchung nicht geeignet. Da sich jedoch durch vorstehende allgemeine Erörterungen das Problem als Verzweigungsproblem ergeben hat, und insbesondere auch die Natur der Verzweigungslösungen bekannt ist, werden im weiteren die periodischen Lösungen einfacher mit der Störungsrechnung bestimmt, wobei man leider auf die von der Integralgleichungstheorie gebotenen Existenz- und Konvergenzsicherheiten verzichten muß.

[1] *L. Lichtenstein*, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen usw. S. 6. Berlin 1936.

[2] Dies hängt damit zusammen, daß nur eine *Green*sche Funktion im weiteren Sinne existiert. Vgl. z. B. *Ph. Frank* u. *R. v. Mises*, Differential- und Integralgleichungen, S. 570. 2. Aufl. Braunschweig 1930.

**c) Periodische Lösungen und ihre Frequenz-Amplituden-Gleichungen.** Zur einfachen Durchführung einer Störungsrechnung werden in die Bewegungsgleichung (33) des Stabes ohne dämpfende Kräfte folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \frac{\pi^2 \eta_{ii}}{\varkappa_i^2}, \tag{47}$$

$$q(\tilde{\varepsilon}) = \frac{\varkappa(\tilde{\varepsilon})}{\varkappa_i}, \tag{48}$$

$$\Gamma = \frac{F(\varkappa_{iiii} - \eta_{ii}^2)}{2 J \varkappa_i^2 \tilde{\varepsilon}}. \tag{49}$$

Dann lautet die Differentialgleichung (33) allgemein mit den hier zweckmäßigen Parametern:

$$q^2 W_i'' + (1 - \tilde{\varepsilon} \cos s) W_i + \Gamma \tilde{\varepsilon} W_i^3 = 0. \tag{50}$$

Durch (49) ist also in die Differentialgleichung (50) der kleine Parameter $\tilde{\varepsilon}$ zusätzlich auch als Faktor bei dem kubischen Glied eingeführt worden [1]. Für die erste Eigenfrequenz würde man zufolge (29), (30) und (32) mit $i = 1$ die speziellen Werte

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon_0}, \tag{47'}$$

$$q = \frac{\varkappa(\varepsilon)}{\pi^2 \sqrt{1 - \varepsilon_0}}, \tag{48'}$$

$$\Gamma = \frac{F}{4 \tilde{\varepsilon} J} \tag{49'}$$

finden. In der Technik sind die statische Vorlast und die pulsierende Last im allgemeinen sehr klein im Vergleich mit der *Euler*schen Knicklast. Es ist daher $\tilde{\varepsilon} \approx \varepsilon \ll 1$ und im weiteren wird daher stets kürzer $\varepsilon$ statt $\tilde{\varepsilon}$ geschrieben. In der Gleichung (50) wird der Index $i$ zur Bezeichnung der $i$-ten Bewegungszeitfunktion (des Ansatzes (8)) entbehrlich, da im weiteren nur noch mit einem jeweils eingliedrigen Ansatz gearbeitet wird.

Die Lösung $W$ und die dividierte Anregungsfrequenz (48) werden nun nach dem kleinen Parameter $\varepsilon$ entwickelt:

$$W = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m W_m, \tag{51}$$

$$q = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m q_m, \tag{52}$$

worin nun der Index $m$ bei den Funktionen $W_m$ zur Kennzeichnung des Koeffizienten der Potenz $\varepsilon^m$ benutzt wird. Führt man nun die Entwicklungen (51) und (52) ein, so lassen sich die Funktionen rekursibel als periodische Funktionen aus den linearen Differentialgleichungen

$$q_0^2 W_0'' + W_0 = 0, \tag{$50^0$}$$

$$q_0^2 W_1'' + W_1 = -2 q_0 q_1 W_0'' + \cos s \, W_0 - \Gamma W_0^3, \tag{$50^1$}$$

$$q_0^2 W_2'' + W_2 = -[2 q_0 q_2 + q_1^2] W_0'' - 2 q_0 q_1 W_1'' + \cos s \, W_1 - 3 \Gamma W_0^2 W_1 \ldots, \tag{$50^2$}$$

berechnen, wenn man die Entwicklungskoeffizienten $q_m$ jeweils geeignet bestimmt. Um das Rekursionsverfahren eindeutig zu machen, werde festgesetzt, daß sich ohne Rücksicht auf Anfangsbedingungen für $\Gamma = 0$ die (nichtnormierten) *Mathieu*schen Funktionen $ce_m$ oder $se_m$ ergeben sollen. Es wird sich zeigen, daß die Frequenzgleichungen dann direkt in die entsprechenden Eigenwertgleichungen der *Mathieu*schen Funktionen übergehen.

α) $ce_1$-Typ. Nach den Ergebnissen des Abschn. 4 b gibt es halbperiodische Lösungen in der Nähe der Anregungsfrequenzen $\varkappa_0 = 2\varkappa_i$, die jetzt berechnet werden sollen. Mit $q_0 = 2$ kommt von den Lösungen der Gleichung ($50^0$) hier nur

$$W_0 = A \cos \frac{s}{2}$$

in Betracht. Für $\Gamma = 0$ und $\varepsilon = 0$ ist dies wie verlangt die Funktion $ce_1$, wenn speziell $A = 1$ gewählt wird. Die „Amplitude" $A$ muß jedoch hier allgemein in die Rechnung aufgenommen

[1] Vgl. z. B. das entsprechende Vorgehen beim *Duffing*schen Problem in *J. J. Stoker*, Nonlinear Vibrations, S. 101. New York 1950.

werden, um die bei nichtlinearen Schwingungen vorhandene Amplituden-Frequenz-Abhängigkeit aufzudecken. Weiter führt nun (50[1]) auf

$$4\,W_1'' + W_1 = q_1 A \cos\frac{s}{2} + \frac{A}{2}\left(\cos\frac{3}{2}s + \cos\frac{s}{2}\right) - \Gamma A^3\left(\frac{1}{4}\cos\frac{3}{2}s + \frac{3}{4}\cos\frac{s}{2}\right)$$

und liefert

$$q_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\Gamma A^2\,, \tag{54}$$

$$W_1 = \left(-\frac{A}{16} + \frac{\Gamma A^3}{32}\right)\cos\frac{3}{2}s\,. \tag{55}$$

So fortfahrend findet man nach einiger Rechnung

$$W = A\cos\frac{s}{2} + \varepsilon\left[-\frac{A}{16} + \frac{\Gamma A^3}{32}\right]\cos\frac{3}{2}s + 0(\varepsilon^2)\,, \tag{56}$$

$$q = 2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\Gamma A^2\right)\varepsilon + \left(-\frac{1}{32} + \frac{1}{8}\Gamma A^2 - \frac{15}{128}\Gamma^2 A^4\right)\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3)\,. \tag{57}$$

In diesen Entwicklungen ist $\Gamma A^2$ von der Größenordnung $\varepsilon^0$ angenommen. Diese Annahme dürfte wegen der Kleinheit von $F/J$ zufolge (49′) für eine technische Aufgabenstellung zutreffen. Der Koeffizient des linearen Gliedes in der Frequenzgleichung (57) ist bereits von *N. W. McLachlan* [1] auf anderem Wege gefunden worden. Insbesondere hat *N. W. McLachlan* auch bemerkt, daß für einen Spezialfall die strenge Lösung von (50) leicht anzugeben ist. Diese findet man aber auch aus der Reihenentwicklung (56) für eine spezielle Amplitude mit:

$$W = \pm\sqrt{\frac{2}{\Gamma}}\cos\frac{s}{2}$$

und der zugehörigen Frequenzgleichung:

$$q = 2 + \varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3)\,.$$

Dieser Sachverhalt rechtfertigt ein gewisses Vertrauen zur Lösung (56) und deren Frequenzgleichung (57).

Ganz entsprechende Rechnungen wie die vorstehende führen auf die durch die Ausführungen von Abschn. 4b nahegelegten Lösungstypen. Die Ergebnisse werden hier nur für Bereiche erster und zweiter Ordnung ausführlich angegeben, da Bereiche höherer Ordnung kaum technische Bedeutung haben dürften.

*β*) $se_1$-Typ. Hier gilt

$$W = A\sin\frac{s}{2} + \varepsilon\left[-\frac{\Gamma A^3}{32} - \frac{A}{16}\right]\sin\frac{3}{2}s + 0(\varepsilon^2)\,, \tag{58}$$

$$q = 2 + \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\Gamma A^2\right]\varepsilon + \left[-\frac{1}{32} - \frac{1}{8}\Gamma A^2 - \frac{15}{128}\Gamma^2 A^4\right]\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3)\,. \tag{59}$$

*γ*) $ce_2$-Typ. Hier gilt

$$W = A\cos s + \varepsilon\left[\frac{A}{2} - \frac{A}{6}\cos 2s + \frac{\Gamma A^3}{32}\cos 3s\right] + 0(\varepsilon^2)\,, \tag{60}$$

$$q = 1 + \frac{3}{8}\Gamma A^2\varepsilon + \left[-\frac{5}{24} - \frac{15}{256}\Gamma^2 A^4\right]\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3)\,. \tag{61}$$

Aus Gleichung (60) liest man ab, daß die Schwingung um $\varepsilon A/2$ aus der Mittellage verschoben ist.

*δ*) $se_2$-Typ. Hier gilt

$$W = A\sin s + \varepsilon\left[-\frac{A}{6}\sin 2s - \frac{\Gamma A^3}{32}\sin 3s\right] + 0(\varepsilon^2)\,, \tag{62}$$

$$q = 1 + \frac{3}{8}\Gamma A^2 + \left[\frac{1}{24} - \frac{15}{256}\Gamma^2 A^4\right]\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3)\,, \tag{63}$$

[1] Vgl. Fußnote 1 auf S. 320. In den dort angegebenen Rechnungen werden allerdings andere Parameter benutzt.

ε) $ce_m$-Typ, $se_m$-Typ allgemein für $m > 2$. Hier gilt:

$$W = A \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \frac{m}{2} s + \varepsilon \left[ - \frac{m^2 A}{8(m+1)} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left(\frac{m}{2}+1\right) s + \frac{m^2 A}{8(m-1)} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left(\frac{m}{2}-1\right) s \pm \frac{\Gamma A^3}{32} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \frac{3}{2} m s \right] + 0(\varepsilon^2),$$

$$q = \frac{2}{m} + \frac{3}{4} \frac{\Gamma A^2}{m} \varepsilon + \left[ - \frac{m}{8(m^2-1)} - \frac{15}{128\, m} \Gamma^2 A^4 \right] \varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3).$$

Hierin gelten die cos-Funktionen und das obere Vorzeichen für den $ce_m$-Schwingungstyp, die sin-Funktionen und das untere Vorzeichen für den entsprechenden $se_m$-Typ. Bis auf Potenzen $\varepsilon^3$ gilt für beide Typen die gleiche Frequenz-Amplituden-Beziehung. —

Im weiteren muß nun noch mit der Methode der kleinen Schwingungen die wichtige Frage untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Lösungen (56), (58), (60) und (62) stabil sind.

d) Stabilität periodischer Lösungen. Zur Untersuchung der Stabilität der berechneten periodischen Lösungen überlagert man diesen kleine Nachbarbewegungen $w_0$ und prüft deren Verhalten für unbegrenzte Zeit. Geht man dementsprechend mit $W + w_0$ in (50) ein und linearisiert in bezug auf $w_0$, so erhält man eine *Hill*sche Gleichung für $w_0$:

$$q^2 w_0'' + (1 - \varepsilon \cos s + 3 \Gamma \varepsilon W^2) w_0 = 0. \tag{64}$$

Zur Entscheidung der Stabilitätsfrage hat man nun abhängig von den Parametern $q$ und $\varepsilon < 1$ zu prüfen, ob $w_0$ für alle Zeit endlich bleibt und damit $W$ stabil ist oder nicht.

Zunächst findet man für die gestreckte Stablage die bekannten Instabilitäten wieder. Setzt man nämlich die strenge Lösung $W \equiv 0$ in (64) ein, so erhält man eine *Mathieu*-Gleichung, deren instabile Lösungen innerhalb der von den Frequenzkurven gebildeten Bereiche

$$q_{\substack{ce_1\\ se_1}} = 2 \mp \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{32} \varepsilon^2 + \cdots, \tag{65}$$

$$q_{\substack{ce_2\\ se_2}} = 1 \begin{matrix} - 5/24\, \varepsilon^2 \\ + 1/24\, \varepsilon^2 \end{matrix} + \cdots \tag{66}$$

liegen. In diesen Frequenzbereichen ist also die gestreckte Stablage instabil, und man hat nach stabilen periodischen Querschwingungen zu suchen.

α) $ce_1$-Typ. Die Lösung (56) der Bewegungsgleichung des Stabes überdeckt zufolge der Frequenzgleichung (57) bei geeigneter Wahl der Amplitude $A$ den ganzen Frequenzbereich (65). Sie ist daher besonders interessant, und es soll jetzt nachgewiesen werden, daß sie in diesem Bereich stets stabil ist. Führt man $W_0$ aus (56) in (64) ein und beachtet die Frequenz-Amplituden-Abhängigkeit (57), so wird (64) wieder eine *Mathieu*sche Gleichung, wenn man sich auf lineare Potenzen von $\varepsilon$ beschränkt:

$$\left(2 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{4} \Gamma A^2 \varepsilon\right)^2 w_0'' + \left(1 - \left[\varepsilon - \frac{3}{2} \Gamma A^2 \varepsilon\right] \cos s\right) w_0 = 0(\varepsilon^2). \tag{67}$$

In (67) sind allerdings die Parameter bereits so umgerechnet, daß die *Mathieu*-Gleichung in der Normalform erscheint, wodurch der Vorzeichenwechsel des letzten Summanden im Frequenzparameter von (67) bedingt ist. Stellt man nun die zu (67) gehörenden Grenzkurven der Instabilitätsbereiche gemäß (65) mit den Parametern der Gleichung (67) auf, so erkennt man, daß die Lösung (56) stets stabil ist, denn die Kurve

$$q(\varepsilon) = 2 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{4} \Gamma A^2 \varepsilon$$

liegt für kleine endliche Amplituden $A$ ganz außerhalb des Instabilitätsbereiches, der von den beiden Grenzkurven

$$q(\varepsilon) = 2 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{4} \Gamma A^2 \varepsilon \quad \text{und} \quad q(\varepsilon) = 2 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{4} \Gamma A^2 \varepsilon$$

gebildet wird. Über die mechanische Bedeutung dieses bisher wichtigsten Ergebnisses wird noch zu sprechen sein.

β) $ce_1$-Typ. Zufolge der Frequenzgleichung (59) gehört die Lösung (58) nicht zu den durch (65) gegebenen Frequenzen, für welche der gerade Stab instabil wird. Die Bewegungsform (58) ist außerdem nicht stabil, da ihre Frequenzkurve

$$q(\varepsilon) = 2 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{4} \Gamma A^2 \varepsilon$$

innerhalb des von

$$q(\varepsilon) = 2 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{4}\Gamma A^2\varepsilon \quad \text{und} \quad q(\varepsilon) = 2 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{4}\Gamma A^2\varepsilon$$

gebildeten Bereiches liegt, wie man aus den den Gleichungen (64) und (67) entsprechenden Gleichungen abliest.

$\gamma$) $ce_2$-Typ. Da sich bei Bereichen höherer Ordnung die Grenzkurvenentwicklungen der Instabilitätsgrenzen erst in den Faktoren der höheren Potenzen von $\varepsilon$ unterscheiden, hat man hier in (64) mindestens $\varepsilon^2$ zu berücksichtigen. Dies würde mit (60) zu einer *Hill*schen Gleichung mit einer längeren Koeffizienten-Funktion und einer entsprechend weitläufigen Stabilitäts-Diskussion führen. Wenn man aber Potenzen $\varepsilon^3$ und höhere vernachlässigt und weiter speziell $q = 1$, d. h. etwa Bereichmitte, annimmt, so erhält man aus (61) eine quadratische Gleichung für $\Gamma A^2$. Von ihren Lösungen ist nur $\Gamma A^2 = \frac{5}{9}\varepsilon + 0(\varepsilon^3)$ brauchbar, da die andere Lösung für $\varepsilon \to 0$ unbeschränkt und daher hier nicht sinnvoll ist. Es wird daher allgemein $\Gamma A^2$ von der Größenordnung $\varepsilon$ mit der freibleibenden Vorzahl $a^2$ angesetzt:

$$\Gamma A^2 = a^2\varepsilon\,. \tag{68}$$

Mit dieser Voraussetzung vereinfacht sich (61) zu

$$q = 1 + \left[-\frac{5}{24} + \frac{3}{8}a^2\right]\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3) \tag{69}$$

und man kann leicht ersehen, daß durch geeignete Wahl von $a$ der ganze Stabilitätsbereich zweiter Ordnung (66) des Stabes zu überdecken ist. Für instabile Stablagen existiert hier also eine ganzperiodische Lösung, deren Stabilität jetzt leicht nachgewiesen werden kann. Mit (68) wird (64) hier

$$q^2 w_0'' + \left(1 + \frac{3}{2}a^2\varepsilon^2 - \varepsilon\cos s + \frac{3}{2}a^2\varepsilon^2\cos 2s\right) w_0 = 0(\varepsilon^3)$$

und die Stabilitätsgrenzen lassen sich in bekannter Weise[1] durch die Berechnung periodischer Lösungen mit Hilfe der Störungsrechnung finden:

$$q = 1 + \begin{matrix}\left[\frac{9}{8}a^2 - \frac{5}{24}\right]\varepsilon^2 \\ \left[\frac{3}{8}a^2 + \frac{1}{24}\right]\varepsilon^2\end{matrix} + 0(\varepsilon^3)\,. \tag{70}$$

Durch Vergleich von (69) und (70) erkennt man, daß (69) niemals in den durch (70) gebildeten Bereich fallen kann. Die Bewegung (60) ist daher stets stabil.

$\delta$) $se_2$-Typ. Macht man wieder die spezielle Voraussetzung (68) hinsichtlich der Amplituden-Größe, so vereinfacht sich die Frequenzgleichung (63) zu:

$$q = 1 + \left[\frac{3}{8}a^2 + \frac{1}{24}\right]\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3)\,.$$

Offenbar liegen diese Frequenzwerte niemals in den durch (66) gegebenen Bereich. Diese Bewegungsform kann daher nur eintreten, wenn der Stab in seiner Ausgangslage stabil ist. Da dieser Fall hier nicht von Interesse ist, soll diese Schwingung nicht auf ihre Stabilität untersucht werden.

e) Dämpfungseinfluß. Um den Einfluß der bisher vernachlässigten dämpfenden Kräfte wenigstens genähert erfassen zu können, sollen die Untersuchungen des vorstehenden Abschn. 4 durch Einbeziehung geschwindigkeitsproportionaler Dämpfungskräfte ergänzt werden.

Die grundlegende Näherungsgleichung (50) für die Querbewegung lautet dann:

$$q^2 W_i'' + D_i \frac{\varkappa}{\varkappa_i} W_i' + (1 - \tilde{\varepsilon}\cos s) W_i + \Gamma\tilde{\varepsilon} W_i^3 = 0\,. \tag{71}$$

Hierin sind die Abkürzungen (47), (48), (49) und außerdem

$$D_i = \frac{2}{\pi}\vartheta_i$$

zweckmäßig, worin $\vartheta_i$ das mit der $i$-ten Eigenfrequenz gemessene logarithmische Dämpfungsdekrement bedeutet. Da $\vartheta_i$ in der Technik sicher kleiner als 0,1 sein dürfte, ist daher auch $D_i \ll 1$.

[1] Vgl. z. B. *N. W. McLachlan*, Theory and Application of Mathieu-Functions, S. 140. Oxford 1947.

Es soll im weiteren nur noch für die speziellen Anregungsfrequenzen $\varkappa_0 = 2\varkappa_i$ und $\varkappa_0 = \varkappa_i$ untersucht werden, wie groß der Schwellwert der Anregungsamplitude mindestens sein muß, um eine periodische Querbewegung anzufachen.

α) $\varkappa_0 = 2\varkappa_i$. Läßt man in (71) den Index $i$ und ˜ fort, so wird hier speziell

$$4\,W'' + 2\,DW' + (1 - \varepsilon\cos s)\,W + \Gamma\varepsilon\,W^3 = 0 \tag{71'}$$

und im Anschluß an *N. W. McLachlan* [1] kann man durch den zweigliedrigen *Fourier*ansatz $W = A_1\cos\frac{s}{2} + B_1\sin\frac{s}{2}$ eine Näherungsaussage für die „Amplitude" $A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$ finden. Aus den beiden Koeffizientengleichungen für $\cos s/2$ und $\sin s/2$

$$DB_1 - \frac{\varepsilon A_1}{2} + \frac{3}{4}\Gamma\varepsilon A_1^3 + \frac{3}{4}\Gamma\varepsilon A_1 B_1^2 = 0\,,$$

$$-DA_1 + \frac{\varepsilon B_1}{2} + \frac{3}{4}\Gamma\varepsilon A_1^2 B_1 + \frac{3}{4}\Gamma\varepsilon B_1^3 = 0$$

läßt sich nämlich $A^2$ berechnen:

$$A^2 = \frac{2}{3\Gamma\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2 - 4D^2}\,.$$

Aus diesem von *N. W. McLachlan* angegebenen Resultat erkennt man, daß eine Bewegung aus der Ruhelage $W \equiv 0$ heraus nur dann erfolgen kann, wenn der Schwellwert der Anregungsamplitude

$$\varepsilon_{min} = 2D$$

überschritten wird.

β) $\varkappa_0 = \varkappa_i$. Zur Berechnung des entsprechenden Schwellwertes für die kritische Anregungsfrequenz des Bereiches zweiter Ordnung hat man in

$$W'' + DW' + (1 - \varepsilon\cos s)\,W + \Gamma\varepsilon\,W^3 = 0 \tag{71''}$$

mit dem dreigliedrigen Ansatz

$$W = A_0 + A_1\cos s + B_1\sin s$$

einzugehen. Hier muß man bereits in erster Näherung drei *Fourier*glieder ansetzen, da zufolge (60) die Querschwingung um eine verschobene Mittellage erfolgt. Aus den Koeffizientengleichungen für 1, $\cos s$ und $\sin s$

$$A_0 - \frac{\varepsilon A_1}{2} + \Gamma\varepsilon A_0^3 + \frac{3}{2}\Gamma\varepsilon A_0(A_1^2 + B_1^2) = 0\,,$$

$$DB_1 - \varepsilon A_0 + \frac{3}{4}\Gamma\varepsilon A_1(A_1^2 + B_1^2) + 3\Gamma\varepsilon A_0^2 A_1 = 0,$$

$$-DA_1 + \frac{3}{4}\Gamma\varepsilon B_1(A_1^2 + B_1^2) + 3\Gamma\varepsilon A_0^2 B_1 = 0$$

läßt sich zwar nicht mehr so einfach die „Amplitude" $A$, aber doch der „Phasentangens"

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{B_1}{A_1}$$

genähert berechnen. Aus der zweiten und dritten Gleichung findet man nämlich ohne Vernachlässigungen eine quadratische Gleichung für $D\operatorname{tg}\Phi$

$$(D\operatorname{tg}\Phi)^2 - \frac{\varepsilon A_0}{A_1}D\operatorname{tg}\Phi + D^2 = 0\,.$$

Da der Phasenwinkel reell ist, muß

$$\frac{\varepsilon^2 A_0^2}{4A_1^2} - D^2 \geq 0$$

sein. Um diese Bedingung auswerten zu können, braucht man eine Näherung für $A_0/A_1$. Eine solche kann man aus der ersten Gleichung durch Vernachlässigung der dritten Potenzen der *Fourier*koeffizienten gegen erste Potenzen finden. Dies führt auf:

$$A_0 \approx \varepsilon\frac{A_1}{2}\,,$$

[1] Vgl. Fußnote 1 von S. 320.

was sich auch in (60) für den ungedämpften Stab auf anderem Wege ergeben hatte. Demnach ist der Schwellwert anzugeben: $\varepsilon_{min} = 2\sqrt{D}$. Zur Anregung einer Querbewegung in dem Bereich zweiter Ordnung ist also eine größere Amplitude nötig als im Bereich erster Ordnung, was nach den bisherigen Aussagen der Stabilitätstheorie für gedämpft schwingende Stäbe zu vermuten war [1].

f) Ergebnisse. Die wichtigsten Ergebnisse des Abschn. 4 sollen nun noch in den ursprünglichen mechanischen Größen angegeben werden.

Für Anregungsfrequenzen $\omega$ in der Nähe von $\omega_0 = 2\omega_i/p$ und weit unterhalb der ersten Längsresonanzfrequenz ließen sich stabile periodische Querschwingungen finden. Da bei den genannten Frequenzen die gerade Ausgangslage des Stabes mit reinen Längsschwingungen instabil ist, kann der Stab aus der gestreckten Lage in Querschwingungen endlicher Amplitude überspringen. Dabei wurde der erste *Fourier*koeffizient der Bewegungsgleichung seiner überwiegenden Größe wegen als „Amplitude" bezeichnet. Diese Amplituden lassen sich für den freiaufgestützten Stab ohne dämpfende Kräfte leicht allgemein angeben. Wenn die Anregungsfrequenz genau den Wert $\omega_0 = 2\,\omega_i$ annimmt, findet man aus der Frequenzgleichung (56) in erster Näherung $\Gamma A^2 = 2/3$ oder mit den Abkürzungen (47), (49) und den Zahlenwerten (29), (30), (31) und (32):

$$A = \pm \sqrt{\frac{8}{3\,i^2}} \sqrt{\frac{J}{F}} \sqrt{\frac{P_1}{P_E}} \qquad (i \text{ ganz}, \quad P_1 \ll P_E), \tag{72}$$

worin $i$ von der Ordnungszahl der $i$-ten Biegeeigenfrequenz herrührt. Ganz entsprechend ergibt sich aus (60) und (68) für $\omega_0 = \omega_i$

$$A = \pm \sqrt{\frac{20\,P_E}{9\,(i^2 P_E - P_0)\,i^2}} \sqrt{\frac{J}{F}\,\frac{P_1}{P_E}} \qquad \left(i \text{ ganz}, \quad \begin{matrix} P_1 \ll P_E \\ P_0 \ll P_E \end{matrix}\right). \tag{73}$$

Vergleicht man (72) und (73), so erkennt man, daß die Amplituden vom Wert Null auf einen Betrag von der Größe des Trägheitsradius springen. Diese Sprünge sind in den Bereichen erster Ordnung proportional $\sqrt{P_1/P_E}$ und damit größer als in den Bereichen zweiter Ordnung, wo sie nur proportional $P_1/P_E$ sind. Die Einbeziehung einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung in die Rechnung ergibt daher plausiblerweise auch, daß in Bereichen zweiter Ordnung der Schwellwert zur Anregung der Amplitudensprünge um einen Faktor von der Größenordnung $\sqrt{P_1/P_E}$ größer sein muß als in den Bereichen erster Art. — Beiden Fällen (72), (73) ist gemeinsam, daß die Amplitudensprünge mit wachsenden Ordnungszahlen der zugehörigen Biegeeigenfrequenzen wie $1/i^2$ abnehmen, und demzufolge die Grundeigenfrequenz die größte Bedeutung hat. Alle diese Ergebnisse passen sich gut in das Bild ein, das man sich nach den Ergebnissen der bisherigen Stabilitätstheorie von dem Mechanismus der Instabilität machen mußte.

**5. Zusammenfassung.** Die vorliegende Arbeit versucht, die Aussagen der „Allgemeinen Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper" von *E. Mettler* [2] im Hinblick auf die Nachbarbewegungen instabiler Grundbewegungen zu ergänzen. Als Modell für die ganze Problemklasse wird wegen seiner Bedeutung in der Technik der axial pulsierend belastete Stab benutzt. Die Stabilitätstheorie sagt für den freiaufgestützt gelagerten Stab insbesondere aus, daß in der Nähe kritischer Anregungsfrequenzen $\omega_0 = 2\,\omega_i/p$ ($p > 0$ ganz, $\omega_i$ $i$-te Biegeeigenfrequenz) der harmonisch pulsierenden Längslast die gestreckte Ausgangslage des Stabes mit reinen Längsschwingungen instabil gegen eine Störung in Querrichtung wird. Hingegen sind die dann eintretenden Querbewegungen des Stabes noch nicht zufriedenstellend berechnet worden, denn die bisher nur gefundenen, unbegrenzt exponentiell anwachsenden Schwingungen sind mechanisch wenig plausibel. —

Ausgehend vom *Hamilton*schen Prinzip wurde daher das Problem näherungsweise nichtlinear behandelt. Dabei konnte man zunächst durch den vielfach bewährten gemischten *Ritz*ansatz die gekoppelten nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen für Quer- und Längsbewegung des Stabes auf gleichartige, jedoch gewöhnliche Differentialgleichungen für die Zeitfunktionen zurückführen. Bei Beschränkung auf den technisch allein bedeutungsvollen Fall einer Anregungsfrequenz weit unterhalb der Längsresonanzfrequenz ließ sich die Querbewegung des Stabes durch eine um ein kubisches Rückstellglied ergänzte *Mathieu*-Gleichung näherungsweise berechnen. Mit der Integralgleichungstheorie ließen sich gerade für die kritischen Anregungs-

[1] Vgl. z. B. für den Stab: *E. Mettler*, Mitt. Forsch.-Anst. Gutehoffnungshütte-Konzern 8 (1950), S. 1.
[2] Vgl. Fußnote 1 von S. 315.

frequenzen $\omega_0$ in bezug auf die Längsanregung halb- oder ganzperiodische Querschwingungen auffinden. Diese nichtlinearen Schwingungen sind mit Hilfe eines Störungsansatzes berechnet worden, und gewisse von ihnen ließen sich mit der Methode der kleinen Schwingungen als stabil nachweisen. Demnach gibt es zur instabilen Ausgangslage des Stabes benachbarte stabile Querschwingungen. Die „Amplitude" springt dann also von Null auf einen endlichen Wert der Größenordnung des Flächenträgheitsradius. Diese Sprünge sind außerdem in Bereichen erster Ordnung (d. h. in der Nähe von $\omega_0 = 2\,\omega_i$) proportional $\sqrt{P_1/P_E}$, in Bereichen zweiter Ordnung (d. h. in der Nähe von $\omega_0 = \omega_i$) dagegen nur proportional $P_1/P_E < 1$.

Bezieht man eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskraft in die Rechnung ein, so findet man dementsprechend, daß infolge der Dämpfung der Schwellwert der Lastamplitude um etwa den gleichen Proportionalitätsfaktor in Bereichen zweiter Ordnung größer sein muß als in Bereichen erster Ordnung. Bereiche erster Ordnung haben also die größere technische Bedeutung, da hier die Querschwingung durch geringere pulsierende Kräfte anzuregen ist.

(Aus dem Institut für Mathematik und Mechanik der Bergakademie Clausthal.)

(Eingegangen am 8. April 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Fritz Weidenhammer*, Clausthal-Zellerfeld, Schulstraße 2.

# Ein einfaches Verfahren zur näherungsweisen Berechnung sämtlicher Torsionseigenfrequenzen eines Stabes veränderlichen Querschnitts.

Von H. Wittmeyer.

**1. Einleitung.** Es wird ein Verfahren entwickelt, das nur eine unbestimmte Integration zur näherungsweisen Berechnung sämtlicher Torsionseigenfrequenzen eines Stabes erfordert. Der Stab habe das Massenträgheitsmoment $J = J(x)$ je Längeneinheit und die Torsionssteifigkeit $G J_d = K = K(x)$. Im Intervall $0 \leq x \leq l$ seien $K > 0$, $J > 0$ und seien beide Größen viermal stetig differentiierbar. Für die Drehamplitude $\varphi_n(x)$ und die Frequenz $f_n = \omega_n/2\pi$ der $n$-ten Eigenschwingung ergibt sich folgendes Eigenwertproblem für die „reine" (d. h. nicht mit Biege- oder Längsschwingungen gekoppelte) Torsionsschwingung:

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{d\varphi_n}{dx}\right) + \omega_n^2 J \varphi_n = 0\,. \tag{1}$$

Das entwickelte Verfahren gestattet dessen angenäherte Lösung für die folgenden drei verschiedenen Randbedingungen: Fest-frei, fest-fest und frei-frei. In dieser Arbeit werden nur die ersten Randbedingungen, d. h.

$$\varphi_n(0) = 0\,, \qquad K\frac{d\varphi_n}{dx}\bigg|_{x=l} = 0\,, \tag{2}$$

behandelt. Die beiden anderen lassen sich mit Hilfe der „Zerlegungsmethode" (Ziff. 6) auf die erste Aufgabe zurückführen. Eine ausführlichere Darstellung sämtlicher hier behandelten Fragen findet man in der früheren Arbeit des Verfassers [1], die im folgenden mit *W* zitiert werden soll.

Die in dieser Arbeit angegebene Methode erfordert einen geringeren Arbeitsaufwand als das Verfahren von *Rayleigh-Ritz* und das Iterationsverfahren, sowie Kombinationen von beiden, und zwar einen relativ umso geringeren, je höher die Ordnung der berechneten Frequenz ist. Diese Einfachheit ist dadurch erreicht, daß bei der hier entwickelten Methode auf die Berechnung von Schwingungsformen verzichtet ist und ebenso auf die Möglichkeit, die Eigenfrequenzen b e l i e b i g genau zu berechnen. (Die erreichte Genauigkeit ist jedoch gut und für die Praxis im allgemeinen ausreichend.) — Die neue Methode liefert in den durchgerechneten Beispielen mit „glatt veränderlichen" Massen- und Steifigkeitsverteilungen genauere Werte als eine Methode etwa gleichen Rechenaufwandes von *P. B. Walker* [2] (die nur die Grundfrequenz liefert). Das liegt unter anderem daran, daß *P. B. Walker* den Stab durch einen masselosen mit einem Einzelträgheitsmoment ersetzt, während in der vorliegenden Arbeit der (nach einem anderen Gesichtspunkte gefundene) Ersatzstab glatt veränderliche Querschnittswerte hat.

Die in der vorliegenden Arbeit angegebenen asymptotischen Formeln zur Berechnung der $n$-ten Eigenfrequenzen unterscheiden sich von den bisher bekannten (vgl. *Collatz* [3], *Ince* [4], *Hohenemser-Prager* [5]) dadurch, daß sie nicht nur für $n \to \infty$ asymptotisch genau werden, sondern auch für $n = 1$ richtig oder angenähert richtig sind.

Die in Ziff. 6 entwickelte „Zerlegungsmethode" zur Berechnung verfeinerter Werte für die Oberfrequenzen benutzt einen Gedanken, der sich schon bei *O. Föppl* und *R. Grammel* findet [6]. Dieser besteht darin, daß man bei den höheren Eigenschwingungsformen die Knoten annehmen soll und dadurch die Berechnung der höheren Frequenzen auf die Berechnung der Grundfrequenzen der zwischen je einem Knoten und einem benachbarten Bauch gelegenen Teilsysteme zurückführen soll. Eine Frequenzberechnung nach diesem Gedanken war bisher jedoch nur bei

[1] *H. Wittmeyer*, A simple method for the approximate computation of all the natural frequencies of a member with variable cross-section. Technical Notes publ. by the Division of Aeronautics of the R. Institute of Technology, Stockholm. Nr. 13. 1951.

[2] *P. B. Walker*, Simple formulae for the fundamental natural frequencies of cantilevers, R & M No. 1831.

[3] *L. Collatz*, Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, S. 117 ff. Leipzig 1945.

[4] *E. L. Ince*, Ordinary Differential Equations, Dover Publications, S. 270 ff. New York ohne Jahreszahl, First American Edition. Vorwort von 1926.

[5] *K. Hohenemser*, Die Methoden zur angenäherten Lösung von Eigenwertproblemen in der Elastokinetik. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 1, H. 4. Berlin 1933. — *K. Hohenemser* und *W. Prager*, Dynamik der Stabwerke. Berlin 1933.

[6] Siehe bei *K. Hohenemser*, a. a. O. S. 62.

masselosen Stäben mit großen Einzelträgheitsmomenten oder bei Stäben konstanten Querschnitts praktisch durchführbar. Mit Hilfe der in der vorliegenden Arbeit aufgestellten neuen Formel zur Berechnung der Grundtorsionsfrequenz ist es nun möglich geworden, diesen Gedanken auch für Stäbe mit glatt veränderlichen Querschnittswerten zu einer praktisch brauchbaren Methode (Ziff. 6) auszubauen.

Bei der Ableitung des neuen Verfahrens wird in einem entscheidenden Punkte die Störungsrechnung benutzt. Bemerkenswert ist dabei, daß sie nicht, wie sonst üblich [1] an den Differentialgleichungen durchgeführt wird, sondern an den zugehörigen Variationsproblemen. Das ist hier möglich, weil nicht nur das gestörte Problem selbstadjungiert ist, sondern auch das ungestörte Problem ebenso gewählt ist. Diese Art der Durchführung ist hier deswegen vorteilhaft, weil beide Variationsprobleme die gleichen (künstlichen) Randbedingungen haben, dagegen die zugehörigen Differentialgleichungen sich in einem Teil der Randbedingungen unterscheiden (nämlich in den natürlichen Randbedingungen, die beim Variationsproblem ja fortgelassen werden können).

**2. Das Verfahren.** Aus den gegebenen Funktionen $J = J(x)$ und $K = K(x)$ bildet man (wie später zu begründen sein wird)

$$L = {}^{10}\log\,(c\,J\,K) \qquad (c > 0,\ \text{beliebig, konstant}) \tag{3}$$

und

$$w = w(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{J}{K}}\,dx \qquad (w(l) = w_l) \tag{4}$$

und findet daraus durch Elimination des Parameters $x$ (eventuell zeichnerisch) die Beziehung $L = L(w)$, aus der man (Abb. 1)

$$k = \frac{L(0{,}123\,w_l) - L(0{,}877\,w_l)}{0{,}754} \tag{5}$$

berechnet. Damit berechnet man weiter

$$F_1 = F_1(k) = 0{,}25 + 0{,}05833\,k + 0{,}003173\,k^2 - 0{,}0001598\,k^3 \ \text{(gültig für } -1{,}7 \leq k \leq 7), \tag{6}$$

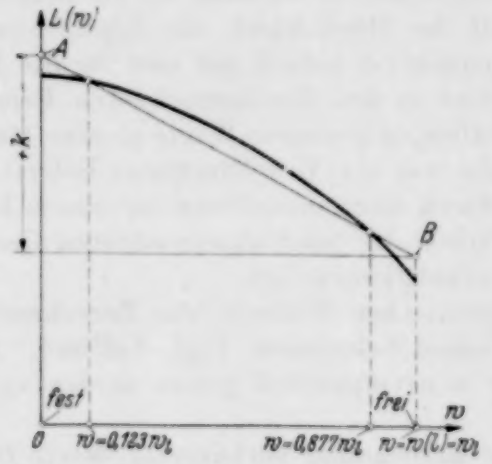


Abb. 1. Graphische Ermittlung von $k$ [Gl.(5)]. $k$ wird negativ, wenn $B$ eine größere Ordinate als $A$ hat.

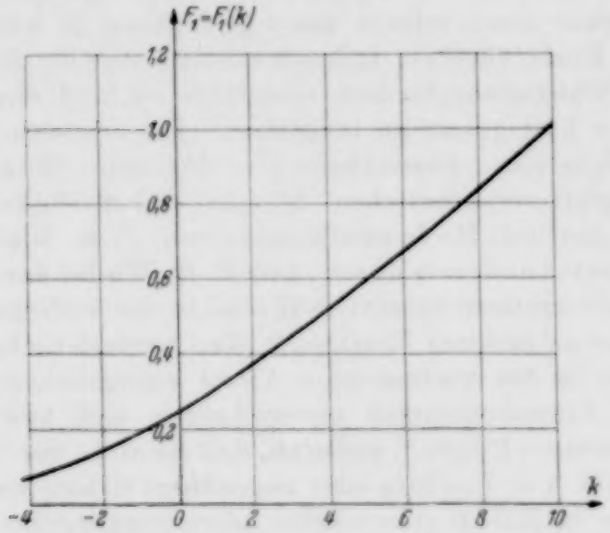


Abb. 2. Zur Ermittlung von $F_1$ für die Gl. (7a, b).

bzw. liest den Wert von $F_1$ aus einer ein für allemal gezeichneten Kurve $F_1 = F_1(k)$ ab (Abb. 2). Die Torsionseigenfrequenzen $f_n$ (Perioden in der Sekunde) sind dann

$$f_n = \frac{F_n}{w_l} \ \text{mit} \quad F_n = \frac{2n-1}{4} + \frac{F_1 - \frac{1}{4}}{2n-1}\ (n = 1, 2\ldots). \tag{7a, b}$$

Die Werte $f_n$ werden bei stark veränderlichem $L = L(w)$ für $n = 2$ und $n = 3$ zweckmäßigerweise noch durch das in Ziff. 6 angegebene Verfahren verbessert.

**3. Beispiel.** Mit $K(x)/K_0 = J(x)/J_0 = \left(1 - 0{,}5\,\frac{x}{l}\right)^4$ wird für $c = (K_0\,J_0)^{-1}$ zunächst $L(w) = 8\,[{}^{10}\log\,(1 - 0{,}5\,w/w_l)]$. Mit (5) und (6) erhält man $k = 2{,}367$ und $F_1 = 0{,}4037$. Die sich damit

[1] Vgl. *L. Collatz*, a. a. O. S. 305 ff.

aus (7a, b) ergebenden Frequenzwerte $f_1, f_2$ und $f_3$ sind in der folgenden Zahlentafel den exakten Werten gegenübergestellt, die durch Umrechnung aus Rechenergebnissen einer Arbeit von *W. Meyer zur Capellen*[1] gewonnen sind:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $l\sqrt{J_0/K_0}\ f_{n,\,exakt}$ | 0,4018 | 0,8265 | 1,300 | 1,783 |
| $l\sqrt{J_0/K_0}\ f_{n,\,Näherung}$ | 0,4037 | 0,8012 | 1,281 | 1,772 |
| Fehler | +0,5% | −3,1% | −1,5% | −0,6% |

Auch weitere durchgerechnete Beispiele ergaben ähnlich gute Resultate. Größere Abweichungen ergaben sich nur bei $f_2$ ($\approx -10\%$). Solche Fehler bei den Oberfrequenzen können jedoch mit der „Zerlegungsmethode" (Ziff. 6) rasch verringert werden.

**4. Ableitung der Formel für die Grundfrequenz.** Statt der Differentialgleichung (1) mit den Randbedingungen (2) wird der Untersuchung das zugehörige Variationsproblem

$$\int_0^l K\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx - \omega^2 \int_0^l J\,\varphi^2\,dx = \text{stationär} \tag{8}$$

mit der einzigen Randbedingung

$$\varphi(0) = 0 \tag{9}$$

zugrundegelegt. Die zweite in (2) enthaltene Randbedingung stellt sich von selbst als natürliche Randbedingung [2] ein. Benutzt man [3] die neuen Größen

$$\xi = \frac{1}{w_l}\int_0^x \sqrt{\frac{J}{K}}\,dx \qquad \left(w_l = \int_0^l \sqrt{\frac{J}{K}}\,dx\right), \tag{10}$$

$$\eta_l(\xi) = \sqrt[4]{K J}\,\varphi(x), \tag{11}$$

$$\lambda = w_l^2\,\omega^2, \tag{12}$$

setzt abkürzungsweise

$$h(\xi) = \frac{1}{4}\log(c\,K\,J)\ (c > 0,\ \text{beliebig, konstant}) \tag{13}$$

und bezeichnet Differentiationen nach $\xi$ mit Strichen, so geht das Eigenwertproblem (8), (9) über in

$$\int_0^1 [(\eta_l' - h'\eta_l)^2 - \lambda\,\eta_l^2]\,d\xi = \text{stationär}, \quad \eta_l(0) = 0\,. \tag{14}$$

Es liegt nahe, den Eigenwert $\lambda_1$ des Problems (14) dadurch angenähert zu berechnen, daß man die Funktion $h'(\xi)$ durch eine Konstante $a$ ersetzt. (Über die Wahl von $a$ vgl. weiter unten.) Dann hat man das neue Problem

$$\int_0^1 [(\eta_l' - a\,\eta_l)^2 - \lambda\,\eta_l^2]\,d\xi = \text{stationär}, \quad \eta_l(0) = 0 \tag{15}$$

für den genäherten Eigenwert $\bar{\lambda}_1$ und die genäherte (normierte) Eigenfunktion $\bar{\eta}_{l1}$ zu lösen.

Der Übergang von (14) zu (15) bedeutet physikalisch, daß der gegebene Stab durch einen anderen fest-freien mit einfacherem Steifigkeits- und Trägheitsmomentenverlauf ersetzt wird, dessen Eigenfrequenzen für $n \to \infty$ das gleiche asymptotische Verhalten zeigen wie die des gegebenen Systems.

Schon *Hohenemser*[4] hat darauf hingewiesen, daß es zur Frequenzberechnung zweckmäßig ist, den gegebenen Stab durch einen einfacheren mit gleichem asymptotischen Frequenzverhalten zu ersetzen.

Durch Lösung der zu (15) gehörigen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erhält man folgende Näherungsformel, deren Fehler im Intervall $-4 \leq a \leq 1$ kleiner

[1] *W. Meyer zur Capellen*, Ann. Physik (5), 8 (1931), S. 297.
[2] *R. Courant, D. Hilbert*, Methoden der Mathematischen Physik, Bd. 1, S. 179 ff., 2. Aufl. Berlin 1931.
[3] Vgl. *E. L. Ince*, a. a. O. S. 270.
[4] A. a. O. S. 39.

als 0,5% ist:

$$\frac{\sqrt{\bar{\lambda}_1}}{2\pi} \approx 0{,}25 - 0{,}10132\, a + 0{,}009575\, a^2 + 0{,}0008375\, a^3 . \tag{16}$$

Nun ist noch ein zweckmäßiger Wert für $a$ zu bestimmen. Dazu denkt man sich die Probleme (14) und (15) mit Hilfe eines Parameters $\varepsilon$ durch folgendes Problem verbunden, das für $\varepsilon = 0$ in (15) und für $\varepsilon = 1$ in (14) übergeht. (Damit $\eta$ eine eindeutige Funktion von $\varepsilon$ wird, fügt man eine Normierungsbedingung für $\eta$ hinzu.)

$$\int_0^1 M(\eta, \eta'; \varepsilon)\, d\xi - \mu \int_0^1 \eta^2\, d\xi = \text{stat.}, \quad \eta(0) = 0, \quad \int_0^1 \eta^2\, d\xi = 1 , \tag{17}$$

wobei

$$M(\eta, \eta'; 0) = (\eta' - a\,\eta)^2 , \quad M(\eta, \eta'; 1) = (\eta' - h'\,\eta)^2 \tag{18}$$

gelten soll. Der niedrigste Eigenwert von (17) sei gleich $\mu_1 = \mu_1(\varepsilon)$ und die zugehörige Eigenfunktion $\eta_1 = \eta_1(\xi; \varepsilon)$. Bezeichnet man die entsprechenden Eigenwerte und normierten Eigenfunktionen von (14) mit $\lambda_1$, $\bar{\eta}_1$ und von (15) mit $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\eta}_1$, so ist

$$\mu_1(0) = \bar{\lambda}_1 , \quad \mu_1(1) = \lambda_1 \tag{19}$$

und

$$\eta_1(\xi; 0) = \bar{\eta}_1(\xi) , \quad \eta_1(\xi; 1) = \bar{\eta}_1(\xi) . \tag{20}$$

Da der Näherungswert $\bar{\lambda}_1$ möglichst wenig von dem exakten Wert $\lambda_1$ verschieden sein soll, so liegt es nahe, als Bestimmungsgleichung für $a$ zu fordern

$$\frac{d\mu_1(0)}{d\varepsilon} = 0 . \tag{21}$$

Aus (21) folgt, da $\bar{\eta}_1$ die *Eulersche* Variationsgleichung von (17) mit $\mu = \mu_1(0)$ erfüllt,

$$\int_0^1 M_\varepsilon\, d\xi = 0 \qquad \text{für } \varepsilon = 0 , \qquad \eta = \bar{\eta}_1 . \tag{22}$$

Nun setzt man

$$M = M_1 = \{\eta' - [a + \varepsilon\,(h' - a)]\,\eta\}^2 . \tag{23}$$

(Über die Zweckmäßigkeit dieser Wahl vgl. Ziff. 8.) Durch Einsetzen von (23) in (22) erhält man nach geeigneter Umformung, wenn man zur Abkürzung noch

$$P_1 = \bar{\eta}_1\,(\bar{\eta}_1' - a\,\bar{\eta}_1) \tag{24}$$

setzt,

$$a = \frac{\int_0^1 h'\,P_1\, d\xi}{\int_0^1 P_1\, d\xi} . \tag{25}$$

Die Konstante $a$ ist also ein gewogenes Mittel von $h'(\xi)$ mit der Gewichtsfunktion $P_1$. Ersetzt man in (25) $h(\xi)$ durch ein Näherungspolynom vierten Grades

$$h = h_0 + m_1\left(\xi - \frac{1}{2}\right) + m_2\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + m_3\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^3 + m_4\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^4 ,$$

so ergibt sich, da die rechte Seite von (25) nur sehr schwach von $a$ abhängt (jedenfalls im praktisch wichtigen Bereich $a \leq 0{,}7$),

$$a \approx m_1 + 0{,}142\, m_3 = \frac{h(0{,}877) - h(0{,}123)}{0{,}754} . \tag{25a}$$

Für $a$ muß somit der Differenzenquotient der Funktion $h(\xi)$ zwischen den Werten $\xi = 0{,}123$ und $\xi = 0{,}877$ gewählt werden. Führt man zur Vereinfachung der numerischen Rechnung statt der Größen $\xi$, $h(\xi)$ und $a$ die Größen

$$w = w_l\,\xi , \quad L = 4\,(^{10}\log e)\,h , \quad k = -4\,(^{10}\log e)\,a \tag{26}$$

ein, so erhält man das in Ziff. 2 geschilderte Verfahren zur Berechnung der Grundfrequenz $f_1$.

**5. Ableitung der asymptotischen Formeln für die Oberfrequenzen.** Es ist nicht zweckmäßig, auch die höheren Frequenzen $f_n$ nach der Methode des vorangehenden Abschnittes anzunähern, weil die der Gewichtsfunktion $P_1$ entsprechenden Gewichtsfunktionen $P_n$ dann im Intervall $0 \leq \xi \leq 1$ ihr Vorzeichen wechseln würden, was zu recht komplizierten Ausdrücken für $a$ führen würde. Statt dessen werden zwei andere Methoden benutzt, von denen die erste hier und die zweite in Ziff. 6 beschrieben wird.

Setzt man in Verallgemeinerung der Formel für $f_1$

$$f_n = \frac{F_n}{w_l} = F_n \left( \int_0^l \sqrt{\frac{J}{K}}\, dx \right)^{-1}, \tag{27}$$

so gilt nach *Ince*[1] folgende asymptotische Formel für $F_n$:

$$F_n = \frac{2n-1}{4} + O\left(\frac{1}{2n-1}\right). \tag{28}$$

Man erkennt, daß

$$F_n = \frac{2n-1}{4} + \frac{F_1 - \frac{1}{4}}{2n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{29}$$

für $n = 1$ genau ist und für große $n$ in erster Näherung gemäß (28) asymptotisch genau ist.

Bei der praktischen Anwendung wird man in (29) für $F_1$ den nach (6) gefundenen Wert einsetzen. Das ergibt das in Ziff. 2 dargelegte Verfahren zur Berechnung der Oberfrequenzen.

**6. Verbesserung von Näherungswerten für die Oberfrequenzen (Zerlegungsmethode).** Bezüglich des Rechenschemas sei auf *W* verwiesen. Hier soll nur die Ableitung des Verfahrens skizziert werden.

Schneidet man einen Stab an den Bäuchen der $n$-ten Eigenschwingungsform durch und hält ihn an den Knoten dieser Schwingungsform fest, so ist die Grundfrequenz $f_{1,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n-1)$ eines jeden der so entstandenen $(2n-1)$ fest-freien Stäbe gleich der Frequenz $f_n$ der $n$-ten Eigenschwingungsform. Die $w$-Werte (4) der Knoten und Bäuche seien mit $w_i$ bezeichnet. Ferner sei $p_i$ die Steigung einer Geraden, die in dem $i$-ten Intervall $w_{i-1} \leq w \leq w_i$ in entsprechender Weise an die Kurve $L = L(w)$ konstruiert ist, wie die Gerade durch $A$, $B$ in Abb. 1 in dem Intervall $0 \leq w \leq w_l$ ($p$ ist also eine mittlere Steigung von $L(w)$ in dem $i$-ten Intervall). Dann ergibt sich mit $k_i = (-1)^i p_i (w_i - w_{i-1})$ nach Ziff. 2

$$(f_n =)\ f_{1,i} = \frac{F_1(k_i)}{w_i - w_{i-1}}. \tag{30}$$

Eine von der Lage der Knoten wenig abhängige Darstellung von $f_n$ ist offensichtlich

$$\frac{F_n}{w_l} = f_n = \frac{1}{\bar{g}} \sum_{i=1}^{2n-1} g_i f_{1,i} \qquad \left(\bar{g} = \sum_{i=1}^{2n-1} g_i\right), \tag{31}$$

wenn die $g_i$ noch so gewählt werden, daß

$$\frac{\partial f_n}{\partial w_i} = 0 \tag{32}$$

ist. Gleichung (32) ergibt für die Gewichte $g_i$ näherungsweise

$$g_i = (w_i - w_{i-1}) \left(1 - \frac{0{,}06\,(-1)^i p_i}{f_n}\right)^{-1}. \tag{33}$$

Die Gleichungen (31) und (33) werden zur iterativen Verbesserung von $f_n$ benutzt, indem man in die rechten Seiten die bei einer irgendwie angenommenen Intervalleinteilung bekannten Näherungswerte $w_i^{(1)}$, $p_i^{(1)}$, sowie die mit ihnen nach (30) berechneten Werte $f_{1,i}^{(1)}$ und schließlich einen geschätzten Wert $f_n^{(0)}$ statt der wahren Werte $w_i$, $p_i$, $f_{1,i}$ und $f_n$ einsetzt und so auf der linken Seite von (31) den verbesserten Wert $f_n^{(1)}$ erhält.

Eine neue Intervalleinteilung berechnet man dann in folgender Weise: Aus der Näherungsformel

$$F_1(k_i) \approx \frac{1}{4} + 0{,}06\, k_i = \frac{1}{4} + 0{,}06\,(-1)^i p_i (w_i - w_{i-1}) \tag{34}$$

[1] A. a. O. S. 270 ff.

ergibt sich durch Auflösung nach $w_i - w_{i-1}$ unter Berücksichtigung von $F_1(k_i) = f_n \cdot (w_i - w_{i-1})$ [siehe (30)]

$$\Delta w_i = w_i - w_{i-1} = [4(f_n - 0{,}06\,(-1)^i\, p_i)]^{-1}. \tag{35}$$

Diese Gleichung wird in der Weise zur Iteration benutzt, daß man rechts statt $f_n$ und $p_i$ die Größen $f_n^{(1)}$ und $p_i^{(1)}$ einsetzt. Auf der linken Seite erhält man neue Größen $(\Delta w_i)^{(2)*}$, die nach einer Normierung, so daß ihre Summe gleich $w_l$ wird, verbesserte Größen $(\Delta w_i)^{(2)}$ ergeben. Durch diese $(\Delta w_i)^{(2)} = w_i^{(2)} - w_{i-1}^{(2)}$ ist eine verbesserte Intervalleinteilung mit den Abszissen $w = w_i^{(2)}$ gegeben, mit der der nächste Iterationsschritt beginnen kann. — Da z. B. zur Berechnung von $f_2$ das Intervall $0 \leq w \leq w_l$ nur drei Teilintervalle hat, ist der für die Zerlegungsmethode erforderliche Rechenaufwand nicht groß. Für große $n$ braucht die Methode nicht angewandt zu werden, da für diese ja die asymptotischen Formeln genau genug sind.

Als B e i s p i e l für die Zerlegungsmethode ist in $W$ die Frequenz der ersten Oberschwingung eines bei $x = 0$ einseitig gehaltenen Stabes mit den Querschnittswerten $K/K_0 = J/J_0 = (1 - 0{,}75\, x/l)^4$ berechnet worden. Als Ausgangslösung wurde eine Einteilung des Intervalles $0 \leq w \leq w_l$ in drei gleiche Teile benutzt, sowie ein nach (7b) berechneter $F_2^{(0)}$-Wert mit einem Fehler von —10%. Das Verfahren ergab nach einem Iterationsschritt einen verbesserten Wert $F_2^{(1)}$ mit einem Fehler von —0,2%.

**7. Fehlerabschätzung.** Wie in $W$ näher gezeigt ist, ist der Fehler bei der Grundfrequenz $f_1$ [bis auf den in (6) enthaltenen Fehler von maximal 0,5%] proportional zu $\mathrm{Max}\,(h''(\xi))^2$, wobei $h(\xi)$ nach (10) und (13) zu berechnen ist. Er kann positiv oder negativ sein. Die nach (7a, b) berechneten Werte von $f_2$ und $f_3$ weisen im allgemeinen größere Fehler auf als der von $f_1$. Die nach der Zerlegungsmethode verbesserten Werte für die Oberfrequenzen sind jedoch durchweg genauer als der Wert für die Grundfrequenz, und zwar

a) weil die zu einem Teilstabe gehörige Funktion $h(\xi)$ $(0 \leq \xi \leq 1)$ nicht so stark gekrümmt ist, wie die zum ganzen Stabe gehörige (andere) Funktion $h(\xi)$ $(0 \leq \xi \leq 1)$,

b) weil $f_n$ durch die Mittelbildung (31) mit der Nebenbedingung (32) gewonnen wird.

**8. Bemerkung zur Wahl von $M = M_1$ in Gleichung (23).** Die Wahl von $M = M_1$ in (23) erscheint zunächst willkürlich, da $M_1$ nur eine von den unendlich vielen $M$-Funktionen darstellt, die die Bedingung (18) erfüllen. Es läßt sich jedoch zeigen, daß $M_1$ unter allen gemäß (18) zulässigen $M$-Werten dadurch ausgezeichnet ist, daß es als einziges $M$ die folgenden Eigenschaften hat, auf deren Vorhandensein die Einfachheit und die Genauigkeit der in dieser Arbeit entwickelten Methode beruht:

a) $\varepsilon$ tritt in $M_1$ explizit höchstens quadratisch auf.

b) Die Wahl $M = M_1$ führt zu einer Gewichtsfunktion $P_1$ [vgl. (24)], die einfach gleich dem Produkt der linken Seiten der künstlichen Randbedingung $\bar{\eta}_{l1} = 0$ für $\xi = 0$ und der natürlichen Randbedingung $\bar{\eta}_{l1}' - a\,\bar{\eta}_{l1} = 0$ für $\xi = 1$ ist.

c) Der Fehler der zu $M = M_1$ gehörigen Methode verschwindet mit der zweiten oder höheren Potenz von $\mathrm{Max}_{0 \leq \xi \leq 1} |h''(\xi)|$.

**9. Schlußbemerkungen.** Das in dieser Arbeit beschriebene Verfahren wird man zweckmäßigerweise dann anwenden, wenn die Schwingungsformen nicht interessieren und bei den Frequenzen ein Fehler von wenigen Prozenten zulässig ist. (Bei den unter Zuhilfenahme der Zerlegungsmethode bisher durchgerechneten Beispielen war der absolute Fehler höchstens 1,8%.) Verlangt man größere Genauigkeiten als etwa 1%, so benutzt man zur Berechnung der Frequenzen niederer Ordnung besser eins der bekannten Verfahren, mit denen die Frequenzen mit jeder vorgeschriebenen Genauigkeit berechnet werden können. Unter diesen Verfahren wird das von *R. Grammel*[1] angegebene den relativ geringsten Mehraufwand an Rechnung gegenüber dem neuen Verfahren haben.

Die in der vorliegenden Arbeit entwickelte Methode läßt sich außer auf die Berechnung von Torsionseigenfrequenzen auch auf die Berechnung der Eigenfrequenzen der Längsschwingungen von Stäben und der Querschwingungen von Saiten, sowie auf die Berechnung der Knicklasten von Stäben mit veränderlicher Längslast und veränderlichem Querschnitt anwenden.

(Eingegangen am 16. April 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *H. Wittmeyer*, Linköping (Schweden), Valkebogatan 14 A.

[1] *R. Grammel*, Ein neues Verfahren zur Lösung technischer Eigenwertprobleme. Ing.-Arch. 10 (1939), S. 35.

# Über die Differentialgleichungen für die Bewegung eines idealisierten Kraftwagens*.

Von **B. Stückler.**

**1. Vorbemerkungen.** In dieser Arbeit werden die Bewegungsgleichungen eines Kraftwagens aufgestellt, der auf einer Ebene rollt, ohne zu gleiten. Die Ebene kann geneigt sein, und es mögen irgendwelche eingeprägte Kräfte auf das Fahrzeug einwirken. Selbstverständlich kommt man bei der Kompliziertheit eines modernen Kraftwagens nicht ohne mehr oder weniger weitgehende Idealisierungen ans Ziel. Daher müssen auch als erstes diejenigen Vereinfachungen angegeben werden, von denen ausgegangen wird, wobei aber hier nicht erörtert werden soll, inwieweit mit ihnen in der Praxis gerechnet werden kann:

1. Das Fahrzeug wird wie ein System starrer Körper behandelt.

2. Es wird nur das reine Rollen des Fahrzeuges untersucht. Das bedeutet u. a., daß vom Steuermechanismus vorausgesetzt werden muß, daß durch ihn das reine Rollen in keiner Weise beeinträchtigt wird, was bei den meisten Kraftwagen nicht ganz der Fall ist. Auch ein Abheben der Räder während der Bewegung soll nicht stattfinden.

3. Die Berührungsfläche zwischen einem Rad und der Fahrebene sei so klein, daß von einem Berührungspunkt gesprochen werden kann. Dieser soll seine Lage gegenüber der Radachse nicht ändern.

4. Bei Berücksichtigung der Relativbewegung von Motor- und Kraftübertragungsteilen gegenüber dem Fahrgestell werden nur die rotierenden Massen, wie Schwungrad, Kurbelwelle und die größeren Zahnräder, beachtet.

5. Die Relativbewegung von Insassen gegenüber dem Fahrgestell wird nicht berücksichtigt; diese werden gewissermaßen in ihrer normalen Stellung auch als starr angesehen.

Für einen Kraftwagen, der diesen Voraussetzungen genau entsprechen würde, werden die genauen allgemeinen Bewegungsgleichungen aufgestellt, während die bisher in der Kraftwagen-Technik benutzten Gleichungen nur für die reine Geradeausfahrt und andere Sonderfälle gelten. Dabei wird so vorgegangen, daß sich die Bewegungsgleichungen anderer Fahrzeugarten, wie des gewöhnlichen vierrädrigen Wagens und des Dreirades, als Sonderfälle ergeben.

Die betrachteten Fahrzeuge gehören zu den nichtholonomen Systemen mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden. Daher liegt es nahe, die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der sog. *Lagrange-Eulers*chen Gleichungen aufzustellen. Es erweist sich aber, daß man auf andere Weise erheblich leichter und schneller ans Ziel gelangt, nämlich durch Anwendung des Prinzips von *D'Alembert* und des Energiesatzes für skleronome Systeme. Hiermit werden in Ziff. **2** die genauen Bewegungsgleichungen aufgestellt.

Bei Berücksichtigung von Motor- und Kraftübertragungsteilen wird an die gebräuchlichste Antriebsart gedacht, nämlich an den Antrieb durch e i n e n Motor über Ausgleichsgetriebe. Dabei wird gleich vom Vierrad-Antrieb ausgegangen, doch so, daß sich aus den aufgestellten Gleichungen ohne weiteres sowohl der reine Hinterradantrieb als auch der reine Vorderradantrieb als Sonderfälle ergeben. Der Antrieb wird aber vom übrigen Fahrzeug gesondert behandelt, so daß leicht zu übersehen ist, was zu ändern ist, wenn es sich um andere Antriebsarten handelt.

In Ziff. **3** ergeben sich wesentliche Vereinfachungen durch Beschränkung auf den Fall kleiner Ausschlagwinkel der Vorderräder, der beim Kraftwagen in der normalen Fahrt meistens vorliegt. Hierzu wird ein Zahlenbeispiel durchgerechnet mit Zahlenwerten, wie sie bei *W. Kamm* und *C. Schmid*[1] zu finden sind. Schließlich wird als erste Anwendung der aufgestellten Bewegungsgleichungen die verhältnismäßig einfache Frage untersucht, wie sich ein Kraftwagen bei einer Geradeausfahrt mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber kleinen Störungen verhält. Es zeigt sich, daß unter den getroffenen Voraussetzungen ein Wagen mit Vorder- oder Vierrad-Antrieb von selbst wieder zur reinen Geradeausfahrt übergeht, während dies beim Hinterradantrieb

* Gekürzte Fassung der von der Technischen Universität Berlin 1951 angenommenen Dissertation (Berichter Prof. Dr. *W. Haack*, Mitberichter Prof. *W. Kucharski*).

[1] *W. Kamm* und *C. Schmid*, Das Versuchs- und Meßwesen auf dem Gebiet des Kraftfahrzeugs, Berlin 1938.

nicht der Fall ist. Das beruht im wesentlichen auf dem Unterschied in der kinematischen Beschaffenheit der Antriebsarten.

In Ziff. 4 wird die kräftefreie Bewegung des gewöhnlichen vierrädrigen Wagens und anderer Fahrzeuge untersucht, deren Bewegungsgleichungen als Sonderfälle aus den Gleichungen des Kraftwagens hervorgehen. Dabei gelangt man zu dem wohl überraschenden Ergebnis, daß die genauen Gleichungen dieser Fahrzeuge exakt gelöst werden können, und zwar durch elementare Funktionen, so daß zur Ermittlung der Bahnkurven nur noch gewöhnliche Quadraturen erforderlich sind. Für die wichtigsten Fälle werden mit Zahlenbeispielen Bahn- und Schleppkurven errechnet und gezeichnet.

**2. Aufstellung der Bewegungsgleichungen.** a) Kennzeichnung der Fahrzeuge. 1. Der Kraftwagen. In Abb. 1 ist das Fahrgestell des Kraftwagens durch das Rechteck $B\,B_1\,B_2\,B_3$ angedeutet, während die Räder einfach durch die Projektion ihrer Berührungskreise mit der Fahrebene dargestellt sind. Die Vorderräder seien um zur Fahrebene senkrechte Achsen durch $B$ und $B_2$ drehbar gelagert und durch den Steuermechanismus miteinander verbunden (in Abb. 2 schematisch skizziert). Die Lenkachsen haben voneinander den Abstand $b'$, ihr Abstand von der Hinterradachse sei $l$. Der Halbmesser der Vorderräder sei $r$, derjenige der Hinterräder $r_1$. Die Berührungskreise der Vorderräder mit der Fahrebene haben von den entsprechenden Lenkachsen den Abstand $c$, derjenige des linken Hinterrades habe den Abstand $a$, derjenige des rechten den Abstand $b$ von $B\,B_1$. Gewöhnlich ist beim Kraftwagen $b = b' + a$. Wenn aber diese Abhängigkeit zunächst nicht vorausgesetzt wird, können gleich andere Fahrzeugarten miterfaßt werden, nämlich:

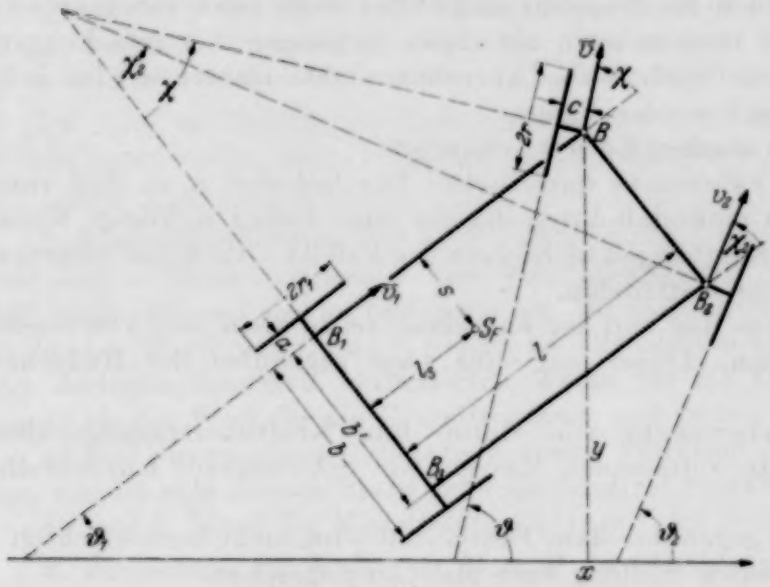


Abb. 1. Bezeichnungen.

2. Der vierrädrige Wagen und der lenkbare Schlitten. Bei diesen ist $b' = 0$, $b = a$.

3. Das Dreirad. Bei diesem ist $b' = 0$, $b = a$, $c = 0$.

4. Das Fahrrad oder Motorrad mit Beiwagen. Bei diesen ist $b' = 0$, $c = 0$, $a = 0$, $b \neq 0$. Allerdings sind bei diesen Fahrzeugen die Lenkachsen geneigt; auch beim Dreirad ist dies in der Regel der Fall.

b) Anzahl der Freiheitsgrade und der Bedingungen. Es seien $x$, $y$ die rechtwinkligen Koordinaten von $B$ in der Fahrebene. Die Längsrichtung des Fahrzeuges sei durch den Winkel $\vartheta_1$ festgelegt, die Stellung der Vorderräder gegenüber der Längsrichtung durch die Winkel $\chi$ und $\chi_2$. Der Rollwinkel des linken Vorderrades, gemessen vom Berührungspunkt bis zu einer Marke auf dem Rade, sei $\varphi$. Entsprechend sei $\varphi_1$ der Rollwinkel des linken Hinterrades, $\varphi_2$ der Rollwinkel des rechten Vorderrades, $\varphi_3$ der Rollwinkel des rechten Hinterrades. Sind diese 9 Größen bekannt, so ist die Lage des Fahrgestells und der 4 Räder auf der Ebene vollständig bestimmt. Die Drehung von Motor- und Kraftübertragungsteilen um deren Achsen wird hier noch nicht berücksichtigt, sondern erst im Abschnitt h). Das bedeutet, daß die in den folgenden Abschnitten aufgestellten Bewegungsgleichungen zunächst nur bei nichtlaufendem, ausgekuppeltem Motor gelten. Vorläufig hat man also nur mit der 9 Koordinaten $x$, $y$, $\vartheta_1$, $\chi$, $\chi_2$, $\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ zu tun. Wird für diese die allgemeine Bezeichnung $q_\nu$ ($\nu = 1,2,\ldots 9$) verwendet, ist jeder Ortsvektor $\bar{r}$ des Fahrzeuges eine Funktion dieser $q_\nu$ und eines Vektors $\bar{a}$, der den einzelnen Fahrzeugpunkt charakterisiert und zeitunabhängig ist:

$$\bar{r} = \bar{r}(q_1, q_2, \ldots, q_9; \bar{a}). \tag{1}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Fahrebene im Raum ruht, kommt die Zeit $t$ in $\bar{r}$ nicht explizit vor; man hat es dann mit einem sogenannten skleronomen System zu tun. Für die Geschwindigkeit jedes Fahrzeugpunktes gilt dann

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{9} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\nu}\,\dot{q}_\nu. \tag{2}$$

Sie ist also eine lineare Funktion der $\dot{q}_\nu$. Diese sind aber bei reinem Rollen nicht voneinander unabhängig, denn dann haben die Berührungspunkte der Räder mit der Fahrebene die Geschwindigkeit Null. Für diese Punkte ist in (2) $d\bar{r}/dt = 0$ zu setzen. Dies ergibt für jedes Rad zwei, bei 4 Rädern also 8 skalare Bedingungsgleichungen. Da aber das eine Hinterrad nicht seitlich gleitet, wenn das andere dies nicht tut, gibt es nur 7 voneinander unabhängige Bedingungsgleichungen. Nun folgt aus (2), daß für jeden Fahrzeugpunkt auch jede beliebige Komponente des Geschwindigkeitsvektors $d\bar{r}/dt$ linear in den $\dot{q}_\nu$ sein muß, so daß die Bedingungsgleichungen die Form

$$\sum_{\nu=1}^{9} b_{\mu\nu}\,\dot{q}_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots 7) \tag{3}$$

haben müssen, worin die Koeffizienten $b_{\mu\nu}$ gewisse Funktionen der Kordinaten $q_\nu$ sind. Demnach handelt es sich um ein System mit 9 Freiheitsgraden im Endlichen und 7 Bedingungsgleichungen, so daß das Fahrzeug im Unendlichkleinen 2 Freiheitsgrade hat.

c) Über die Ableitung der Bewegungsgleichungen. Das Aufstellen der Bewegungsgleichungen für derartige Systeme mit linearen Bedingungsgleichungen bereitet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, wenn man sich der sog. *Lagrange-Eulerschen* Gleichungen bedient[1]. Wie schon oben gesagt, führt aber die Anwendung des Prinzips von *D'Alembert* und des Energiesatzes erheblich schneller zum Ziel, ein Weg, der auch bei manchen anderen nichtholonomen Systemen mit Vorteil benutzt werden kann.

Zunächst wird als sogenannte nichtholonome Geschwindigkeitsgröße die Geschwindigkeit $v$ der linken Lenkachse eingeführt. Auch diese muß sich linear durch die $\dot{q}_\nu$ ausdrücken lassen:

$$\sum_{\nu=1}^{9} b_{\mu\nu}\,\dot{q}_\nu = v \qquad (\mu = 8)\,. \tag{4}$$

Ferner wird zu den 8 Gleichungen (3) und (4) als neunte die Identität

$$\dot{q}_4 = \dot{\chi} \tag{5}$$

hinzugefügt. Dann hat man ein lineares Gleichungssystem mit 9 voneinander unabhängigen Gleichungen, die man sich nach den $\dot{q}_\nu$ aufgelöst denken kann. Die $\dot{q}_\nu$ müssen demnach lineare Funktionen von $v$ und $\dot{\chi}$ sein. Infolgedessen muß sich die Geschwindigkeit jedes Fahrzeugpunktes linear durch $v$ und $\dot{\chi}$ ausdrücken lassen.

Entsprechendes gilt dann aber auch für die virtuellen Verschiebungen, denn die Gleichungen (3), (4), (5) bleiben gültig, wenn die Geschwindigkeiten $\dot{q}_\nu$ durch die entsprechenden virtuellen Änderungen $\delta q_\nu$ ersetzt werden und an Stelle von $v$ die virtuelle Verschiebung $\delta s$ von $B$ eingeführt wird. Demnach gilt:

Die virtuelle Verschiebung jedes Fahrzeugpunktes läßt sich linear durch die Verschiebung $\delta s$ der linken Lenkachse und durch die virtuelle Drehung $\delta\chi$ des linken Vorderrades ausdrücken.

Daher kann die virtuelle Arbeit $\delta A_e$ der eingeprägten Kräfte stets auf die Form

$$\delta A_{e_0} = K_0\,\delta s + M_0\,\delta\chi \tag{6}$$

gebracht werden, worin der Index 0 andeuten soll, daß vorläufig die Relativbewegung von Motor- und Kraftübertragungsteilen nicht berücksichtigt wird.

Um die zu den so eingeführten allgemeinen Kraftkomponenten $K_0$ und $M_0$ gehörenden Bewegungsgleichungen aufzustellen, führt der folgende Gedankengang ans Ziel:

Wird bei ruhendem Fahrgestell das Lenkrad gedreht, so werden dadurch nur die Vorderräder und Teile des Steuermechanismus bewegt. Demnach kann sich auch eine virtuelle Drehung $\delta\chi$ des linken Vorderrades nur auf die eben genannten Fahrzeugteile auswirken, für die im folgenden die zusammenfassende Bezeichnung „Vorderradsystem" benutzt wird; die virtuellen Verschiebungen aller anderen Fahrzeugpunkte, die nicht zum Vorderradsystem gehören, können infolgedessen nicht von $\delta\chi$ sondern nur von $\delta s$ abhängen. Die an diesen Punkten angreifenden eingeprägten Kräfte liefern daher nur einen Beitrag zu $K_0$. $M_0$ setzt sich somit nur aus Momenten zusammen, die von den am Vorderradsystem wirkenden eingeprägten Kräften herrühren.

Demnach muß die zur Momentengröße $M_0$ gehörende Bewegungsgleichung des Kraftwagens gleichzeitig eine Bewegungsgleichung des Vorderradsystems allein sein. Nun wird sich in Ab-

[1] Siehe *G. Hamel*, Theoretische Mechanik, S. 480, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1949.

schnitt e) zeigen, daß diese Gleichung verhältnismäßig leicht aufgestellt werden kann, wenn das Prinzip von *D'Alembert* benutzt wird. Ist diese Gleichung aber einmal bekannt, dann ist das Aufstellen der noch fehlenden für $K_0$ kein Problem mehr, denn diese läßt sich dann einfach aus dem Energiesatz für skleronome Systeme ableiten, was im Abschnitt g) geschieht.

Bevor an die Aufstellung der Bewegungsgleichungen herangegangen wird, müssen die bei reinem Rollen geltenden Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten in expliziter Form aufgestellt werden.

d) Die Bedingungsgleichungen. Besonders leicht lassen sich die Bedingungsgleichungen angeben, wenn gleich geeignete nichtholonome Geschwindigkeitsgrößen benutzt werden. Als solche werden außer $\bar{v}$ noch eingeführt: die Geschwindigkeit $\bar{v}_1$ von $B_1$, die Geschwindigkeit $\bar{v}_2$ von $B_2$.

Diese Geschwindigkeitsvektoren müssen parallel zu den entsprechenden Radebenen gerichtet sein, wenn die Räder nicht seitlich gleiten. Nun besteht die Relativbewegung von $B$ gegenüber $B_1$ nur aus einer Drehung um $B_1$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}_1$. Der Vektor der Relativgeschwindigkeit muß demnach senkrecht auf $\bar{v}_1$ stehen und die Größe $l\dot{\vartheta}_1$ haben. Daraus folgt

$$v_1 = v\cos\chi\,, \qquad l\dot{\vartheta}_1 = v\sin\chi\,. \tag{7}$$

Dies sind die Bedingungen für das Nichtstattfinden seitlichen Gleitens der Hinterräder und des linken Vorderrades. Aber auch für das rechte Vorderrad läßt sich die Bedingung leicht angeben. Die Bewegung des Fahrgestelles kann nämlich in jedem Augenblick als reine Drehung um ein Momentanzentrum aufgefaßt werden. Dieses ist aber leicht zu finden; denn wenn die Räder nicht seitlich gleiten, muß es der Schnittpunkt der Verlängerungen der Radachsen sein. Daraus ergibt sich aber einfach (Abb. 1)

$$\operatorname{ctg}\chi_2 = \operatorname{ctg}\chi + \lambda \qquad \text{mit } \lambda = \frac{b'}{l}\,. \tag{8}$$

Diese Bedingung, die von dem Steuermechanismus erfüllt werden muß, ist also holonom.

Außerdem wird von jedem Rad vorausgesetzt, daß es auch in seiner Ebene nicht gleitet. Wird der positive Drehsinn der Räder dadurch festgelegt, daß beim Vorwärtsfahren des Fahrzeuges die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}$, $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, $\dot{\varphi}_3$ positiv sein sollen, so lauten die Bedingungen offensichtlich

$$\left.\begin{aligned} &\text{für das linke Vorderrad} \quad r\dot{\varphi} = v - c\dot{\vartheta}, \quad \text{für das linke Hinterrad} \quad r_1\dot{\varphi}_1 = v_1 - a\dot{\vartheta}_1\,,\\ &\text{für das rechte Vorderrad} \quad r\dot{\varphi}_2 = v_2 + c\dot{\vartheta}_2, \quad \text{für das rechte Hinterrad} \quad r_1\dot{\varphi}_3 = v_1 + b\dot{\vartheta}_1\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Dann findet man nach einfacher Rechnung, daß die benutzten Geschwindigkeitsgrößen in folgender Weise mit $v$, $\chi$ und $\dot{\chi}$ zusammenhängen:

$$v_1 = v\cos\chi\,, \tag{10a}$$

$$\dot{\vartheta}_1 = \frac{v}{l}\sin\chi\,, \tag{10b}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{v}{r_1}\left(\cos\chi - \frac{a}{l}\sin\chi\right), \tag{10c}$$

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{v}{r_1}\left(\cos\chi + \frac{b}{l}\sin\chi\right), \tag{10d}$$

$$v_2 = g(\chi)v \quad \text{mit} \quad g(\chi) = +\sqrt{1 + \lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi}\,, \tag{10e}$$

$$\dot{\chi}_2 = f(\chi)\,\dot{\chi} \quad \text{mit} \quad f(\chi) = \frac{1}{1 + \lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi}\,, \tag{10f}$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{v}{l}\sin\chi + \dot{\chi}\,, \tag{10g}$$

$$\dot{\vartheta}_2 = \frac{v}{l}\sin\chi + f(\chi)\dot{\chi}\,, \tag{10h}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{r}\left(1 - \frac{c}{l}\sin\chi\right) - c\,\dot{\chi}\,, \tag{10i}$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{v}{r}\left(g(\chi) + \frac{c}{l}\sin\chi\right) + c\,f(\chi)\,\dot{\chi}\,. \tag{10k}$$

e) Aufstellung einer Bewegungsgleichung mit Hilfe des Prinzips von *D'Alembert*. Im Abschnitt c) hatte sich gezeigt, daß sich eine Bewegungsgleichung des Kraftwagens aus dem Vorderradsystem allein ergeben muß. An diesem halten sich nach dem *D'Alembert*schen

Prinzip die um die negativen Massenbeschleunigungen vermehrten eingeprägten Kräfte das Gleichgewicht. Um also dieses Prinzip anwenden zu können, muß zuerst die entsprechende allgemeine Gleichgewichtsbedingung für die am Vorderradsystem angreifenden eingeprägten Kräfte bestimmt werden. Das ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, die durch (6) zunächst rein formal eingeführte Momentengröße $M_0$ in allgemeiner expliziter Form durch die am Vorderradsystem wirkenden eingeprägten Kräfte auszudrücken; denn bei Gleichgewicht muß ja nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten $\delta A_{e_0} = 0$ sein, also auch $M_0 = 0$. Zur Bestimmung dieser Gleichgewichtsbedingung kann aber in (6) ohne weiteres $\delta s = 0$ gewählt werden. Dann bleibt also $\delta A_{e_0} = M_0 \, \delta\chi$, und dieses läßt sich leicht an Hand von Abb. 2 bestimmen. Dort bedeutet $M_L$ das eingeprägte Moment am Lenkrad, $M_z$ bzw. $M_{z_2}$ das Moment der am linken bzw. rechten Rad angreifenden eingeprägten Kräfte um die Lenkachse durch $B$ bzw. $B_2$ (solche Momente

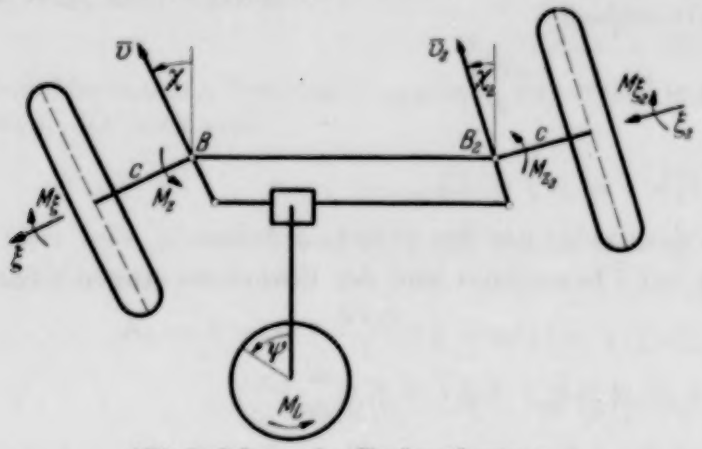


Abb. 2. Schema des Vorderradsystems.

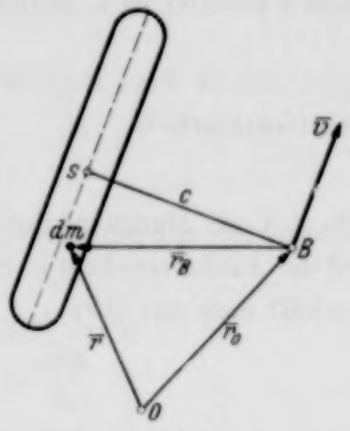


Abb. 3.

können z. B. bei Seitenwind auftreten), $M_\xi$ bzw. $M_{\xi_2}$ das Moment der eingeprägten Kräfte um die entsprechende Radachse ($\xi$-Achse bzw. $\xi_2$-Achse), z. B. das Bremsmoment und das Moment des Rollwiderstandes, $\psi = \psi(\chi)$ den Ausschlagwinkel des Lenkrades; dieser ist eine Funktion von $\chi$, die sich aus den Einzelheiten des Steuermechanismus ergibt. Hiernach ist zunächst

$$\delta A_{e_0} = M_L \, \delta\psi + M_z \, \delta\chi + M_{z_2} \, \delta\chi_2 + M_\xi \, \delta\varphi + M_{\xi_2} \, \delta\varphi_2 \,. \tag{11}$$

Bei reinem Rollen und $\delta s = 0$ ist aber

$$\delta\psi = \psi'(\chi) \, \delta\chi \,, \qquad \delta\chi_2 = f(\chi) \, \delta\chi \,, \qquad r \, \delta\varphi = -c \, \delta\chi \,, \qquad r \, \delta\varphi_2 = c \, f(\chi) \, \delta\chi \,, \tag{12}$$

so daß aus (11) wird

$$\delta A_{e_0} = \left[ M_L \, \psi'(\chi) + M_z - \frac{c}{r} \, M_\xi + f(\chi) \left( M_{z_2} + \frac{c}{r} \, M_{\xi_2} \right) \right] \delta\chi \,, \tag{13}$$

worin der Klammerausdruck mit $M_0$ identisch sein muß.

Demnach lautet die gesuchte allgemeine Gleichgewichtsbedingung für das Vorderradsystem

$$M_0 \equiv M_L \, \psi'(\chi) + M_z - \frac{c}{r} \, M_\xi + f(\chi) \left( M_{z_2} + \frac{c}{r} \, M_{\xi_2} \right) = 0 \,. \tag{14}$$

Um daraus die Bewegungsgleichung zu erhalten, hat man nur noch die negativen Massenbeschleunigungen zu den eingeprägten Kräften hinzuzufügen. Nun können die Massenbeschleunigungen der Steuerung sicherlich vernachlässigt werden, so daß zum ersten Glied in (14) nichts hinzukommt. An zweiter Stelle steht dort das am linken Vorderrad um dessen Lenkachse wirkende eingeprägte Moment $M_z$. Von diesem ist also das Moment der Massenbeschleunigung um die gleiche Achse abzuziehen. In Abb. 3 ist der Vektor von $B$, dem Schnittpunkt von Rad- und Lenkachse, nach einem Massenelement $dm$ des linken Vorderrades mit $\bar{r}_B$ bezeichnet. Ferner sei $\bar{b}$ der Vektor der Absolutbeschleunigung des Massenelementes und $(\bar{r}_B \times \bar{b})_z$ die $z$-Komponente des Vektorprodukts $\bar{r}_B \times \bar{b}$.

Dann ist vom Moment $M_z$ der Wert $\int (\bar{r}_B \times \bar{b})_z \, dm$ abzuziehen. Mit den übrigen in (14) auftretenden Gliedern ist in entsprechender Weise zu verfahren, um zur Rohform der Bewegungsgleichung des Vorderradsystems zu gelangen. Diese lautet in nun ohne weiteres verständlicher Schreibweise

$$M_0 = \int (\bar{r}_B \times \bar{b})_z \, dm - \frac{c}{r} \int (\bar{r}_B \times \bar{b})_\xi \, dm + f(\chi) \left[ \int (\bar{r}_{B_2} \times \bar{b})_z \, dm + \frac{c}{r} \int (\bar{r}_{B_2} \times \bar{b})_{\xi_2} \, dm \right] . \tag{15}$$

Jetzt ist es zweckmäßig, $\bar{r}_B \times \bar{b}$ umzuformen. In Abb. 3 soll der Punkt 0 ein ruhender Bezugspunkt sein und $S$ der Schwerpunkt des Rades, wobei der Einfachheit wegen angenommen werden soll, daß dieser über dem Berührungspunkt des Rades mit der Fahrebene liegt. Dann gilt zunächst

$$\int (\bar{r}_B \times \bar{b})\, dm = \frac{d}{dt} \int (\bar{r}_B \times \dot{\bar{r}})\, dm + \bar{v} \times \int \dot{\bar{r}}\, dm\,. \tag{16}$$

Dabei ist aber $\int (\bar{r}_B \times \dot{\bar{r}})\, dm$ der Drall des Rades bezüglich $B$. Wird dieser mit $\bar{D}_B$ bezeichnet, die Masse des Rades mit $m_R$ und die Geschwindigkeit des Schwerpunktes $S$ mit $\bar{v}_s$, lautet (16)

$$\int (\bar{r}_B \times \bar{b})\, dm = \frac{d\bar{D}_B}{dt} + m_R\, \bar{v} \times \bar{v}_s\,. \tag{17}$$

Da jedoch $\bar{v}$ parallel zu $\bar{v}_s$ gerichtet ist, gilt einfach

$$\int (r_B \times \bar{b})\, dm = \frac{d\bar{D}_B}{dt}\,. \tag{18}$$

Nun ist offensichtlich

$$\bar{D}_B = m_R\, \bar{r}_s \times \bar{v} + A\dot{\vartheta} + C\dot{\bar{\varphi}}\,, \tag{19}$$

mit $A$ bzw. $C$ als Hauptträgheitsmoment des Rades um die $z$- bzw. $\xi$-Achse.

Wird der Einheitsvektor in $\xi$-Richtung mit $\bar{i}$ bezeichnet und der Einheitsvektor in $z$-Richtung mit $\bar{k}$, erhält man aus (19)

$$\frac{d\bar{D}_B}{dt} = (-m_R\, c\, \dot{v} + A\dot{\vartheta})\bar{k} + C\ddot{\bar{\varphi}}\,\bar{i} + C\,\dot{\bar{\varphi}}\,\frac{d\bar{i}}{dt}\,. \tag{20}$$

Hiervon werden aber in (15) nur die $z$- und die $\xi$-Komponente gebraucht. Zu diesen liefert aber das letzte Glied in (20) keinen Beitrag, weil $d\bar{i}/dt$ senkrecht auf $\bar{k}$ und $\bar{i}$ steht.

Durch Einsetzen von (18) und (20) in (15) erhält man dann mit den Abkürzungen

$$m' = m_R + \frac{C}{r^2}\,, \qquad A' = A + \frac{C^2}{r^2} \tag{21}$$

schließlich die Bewegungsgleichung des Vorderradsystems:

$$M_0 = A'(\ddot{\vartheta} + f(\chi)\,\ddot{\vartheta}_2) + c\,m'(f(\chi)\,\dot{v}_2 - \dot{v})\,. \tag{22}$$

Hierin sind nun noch $\ddot{\vartheta}$, $\ddot{\vartheta}_2$, $\dot{v}_2$ mit Hilfe der Bedingungsgleichungen (10) durch $v$ und $\chi$ und deren Abteilungen auszudrücken, um zur eigentlichen Bewegungsgleichung zu gelangen. Vorläufig bedient man sich aber zweckmäßigerweise der kurzen Form (22).

f) Die kinetische Energie $T_0$. Für die kinetische Energie $T_R$ des linken Vorderrades ergibt sich leicht aus Abb. 1

$$2\,T_R = m_R\, v^2 + A\dot{\vartheta}^2 - 2\,m_R\, c\,\dot{\vartheta}\,v + C\dot{\varphi}^2\,,$$

woraus unter Berücksichtigung der ersten Bedingungsgleichung von (9) und den Abkürzungen (21) wird

$$2\,T_R = m'\,v^2 + A'\dot{\vartheta}^2 - 2\,c\,m'\,v\,\dot{\vartheta}\,. \tag{23}$$

Entsprechend bekommt man für das rechte Vorderrad

$$2\,T_{R_2} = m'v_2^2 + A'\dot{\vartheta}_2^2 + 2\,c\,m'v_2\,\dot{\vartheta}_2\,. \tag{24}$$

Ferner gilt offensichtlich für das übrige Fahrzeug (dieses wird im Folgenden kurz mit $F$ bezeichnet)

$$2\,T_F = m_F\,v_1^2 + J\dot{\vartheta}_1^2 + 2\,m_F\,s\,v_1\,\dot{\vartheta}_1 + C_1(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_3^2)\,, \tag{25}$$

worin $m_F$ die Masse von $F$ bedeutet, $J$ das Trägheitsmoment von $F$ um die Vertikale durch $B_1$, $s$ der Abstand des Schwerpunktes $S_F$ von $F$ von $BB_1$ (Abb. 1), $C_1$ das Hauptträgheitsmoment eines Hinterrades um seine Achse.

Schließlich erhält man mit Hilfe der Bedingungsgleichungen (10) aus (23), (24) und (25) nach kurzer Rechnung für die gesamte kinetische Energie $T_0$ des Fahrzeugs

$$2\,T_0 = h(\chi)\,v^2 + m'(v^2 + v_2^2) + A'(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\vartheta}_2^2) + 2\,c\,m'(v_2\,\dot{\vartheta}_2 - v\,\dot{\vartheta}) \tag{26}$$

mit

$$h(\chi) \equiv m_{F_1} + m_{F_2} \sin 2\chi + m_{F_3} \sin^2\chi\,, \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} m_{F_1} &= m_F + 2\,\frac{C_1}{r_1^2}\,,\\ m_{F_2} &= \frac{1}{l}\left(m_F\, s + \frac{C_1}{r_1^2}\,(b-a)\right),\\ m_{F_3} &= \frac{1}{l^2}\left(J - m_F\, l^2 - \frac{C_1}{r_1^2}\,(2\,l^2 - a^2 - b^2)\right). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

**g) Anwendung des Energiesatzes.** Die noch fehlende Bewegungsgleichung wird mit Hilfe des Energiesatzes für skleronome Systeme aufgestellt. Für die Leistung $L_e$ der eingeprägten Kräfte gilt

$$L_e \equiv \dot{A}_e = \dot{T}\,.$$

Aus (6) folgt aber einfach

$$\dot{A}_{e_0} = K_0\, v + M_0\, \dot{\chi}\,,$$

denn bei skleronomen Systemen gehören die wirklichen Verschiebungen auch zu den möglichen virtuellen. Es muß also

$$K_0 = \frac{1}{v}\left[\dot{T}_0 - M_0\,\dot{\chi}\right] \tag{29}$$

sein. Setzt man hier (26) und (22) ein, ergibt sich nach einiger Rechnung für die gesuchte Bewegungsgleichung zunächst

$$\left.\begin{aligned} K_0 = {} & h(\chi)\,\dot{v} + \frac{h'(\chi)}{2}\,v\,\dot{\chi} + m'(v + g(\chi)\dot{v}_2) + \frac{A'}{l}\sin\chi\,(\ddot{\vartheta} + \ddot{\vartheta}_2) + \\ & + \frac{c\,m'}{l}\sin\chi(\dot{v}_2 - \dot{v}) + c\,m'\left(g(\chi)\,\ddot{\vartheta}_2 - \ddot{\vartheta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Hierin sowie in (22) sind nun noch die Bedingungsgleichungen (10) einzusetzen. Die Rechnung ergibt, unter Einführung der Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} m &= m_F + 2\,m_R \text{ (Gesamtmasse)},\\ m_1 &= m + 2\,\frac{C}{r^2} + 2\,\frac{C_1}{r_1^2}\,,\\ m_2 &= m_{F_3} + 2\,\frac{A'}{l^2}\,, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned} k_{01}(\chi) \equiv {} & m_1 + (m_{F_2} + \lambda m')\sin 2\chi + (m_2 + \lambda^2 m')\sin^2\chi + \\ & + 2\,\frac{c\,m'}{l}\sin\chi\left(\sqrt{1 + \lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi} - 1\right),\\ k_{02}(\chi) \equiv {} & (m_{F_2} + \lambda m')\cos 2\chi + \frac{1}{2}\,(m_2 + \lambda^2 m')\sin 2\chi + \\ & + \frac{c\,m'}{l}\left[\frac{\lambda}{2}\sin\chi\,\frac{2\cos 2\chi + \lambda\sin 2\chi}{\sqrt{1 + \lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi}} + \cos\chi\left(\sqrt{1 + \lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi} - 1\right)\right],\\ k_{03}(\chi) \equiv {} & \frac{A'}{l}\sin\chi\left(1 + \frac{1}{1 + \lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi}\right) + c\,m'\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi}} - 1\right),\\ k_{04}(\chi) \equiv {} & -\lambda\left(\frac{A'}{l}\sin\chi + c\,m'\sqrt{1 + \lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi}\right)\frac{2\cos 2\chi + \lambda\sin 2\chi}{(1 + \lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi)^2}\,, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned} m_{01}(\chi) \equiv {} & k_{03}(\chi)\,,\\ m_{02}(\chi) \equiv {} & \frac{A'}{l}\cos\chi\left(1 + \frac{1}{1 + \lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi}\right) + \frac{\lambda\,c\,m'}{2}\,\frac{2\cos 2\chi + \lambda\sin 2\chi}{\sqrt{1 + \lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi^3}}\,,\\ m_{03}(\chi) \equiv {} & A'\left(1 + \frac{1}{1 + \lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi)^2}\right),\\ m_{04}(\chi) \equiv {} & -\lambda A'\,\frac{2\cos 2\chi + \lambda\sin 2\chi}{(1 + \lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi)^3} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

für die Bewegungsgleichungen des hier behandelten Kraftwagens bei nicht laufendem, ausgekuppeltem Motor:

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= k_{01}(\chi)\,\dot{v} + k_{02}(\chi)\,v\,\dot{\chi} + k_{03}(\chi)\,\ddot{\chi} + k_{04}(\chi)\,\dot{\chi}^2 \equiv k_0\,,\\ M_0 &\equiv M_L\,\psi'(\chi) + M_z - \frac{c}{r}\,M_\xi + \frac{1}{1 + \lambda\sin 2\chi + \lambda^2\sin^2\chi}\,(M_{z_2} + \frac{c}{r}\,M_{\xi_2}) = \\ &= k_{03}(\chi)\,\dot{v} + m_{02}(\chi)\,v\,\dot{\chi} + m_{03}(\chi)\,\ddot{\chi} + m_{04}(\chi)\,\dot{\chi}^2 \equiv m_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

**h) Berücksichtigung der rotierenden Motor- und Kraftübertragungsteile und Übergang zum Vierrad-Antrieb.** Bei den rotierenden Motor- und Kraftübertragungsteilen handelt es sich vorwiegend um achsensymmetrische Körper, deren Achsen im Fahrzeug parallel zur Fahrebene gelagert sind (z. B. Schwungrad, Getrieberäder). Dadurch lassen sich diese besonders leicht behandeln; denn sowohl die eigene Achse als auch die Vertikale zur Fahrebene durch den Körperschwerpunkt sind stets Hauptträgheitsachsen, was zu einfachen Beziehungen führt. Nicht so einfach liegen dagegen die Verhältnisse bei anderen Teilen, beispielsweise bei der Kurbelwelle. Aber dieser kurze Hinweis möge hier genügen, weil ein Eingehen auf derartige Feinheiten über den Rahmen dieser Arbeit hinausführen würde. Mit anderen Worten:

Genau genommen beziehen sich die folgenden Untersuchungen auf starre Körper mit rotationssymmetrischen Trägheitsellipsoiden bezüglich der Körperschwerpunkte, deren Achsen mit den parallel zur Fahrebene gelagerten Körperachsen zusammenfallen.

Außerdem wird jetzt zum allgemeineren Fall des Vierrad-Antriebes übergegangen, und zwar so, daß sich aus ihm dann ohne weiteres sowohl der reine Hinterradantrieb als auch der reine Frontantrieb als Sonderfälle ergeben. Im Gegensatz zum Hinterradantrieb, auf den sich die vorhergehenden Untersuchungen bezogen, ist beim Vierrad-Antrieb auch der Motor an das Vorderradsystem angeschlossen. Aber offensichtlich ändert dies grundsätzlich nichts an den Überlegungen des Abschnittes c), die zu den Bewegungsgleichungen (34) führten. Demnach können der Vierrad-Antrieb und die rotierenden Motor- und Kraftübertragungsteile lediglich zu gewissen Zusatzgliedern in den Bewegungsgleichungen führen.

Bei voll eingekuppeltem Motor wird statt (6) gesetzt

$$\left.\begin{aligned} \delta A_e &= K\,\delta s + M\,\delta\chi \equiv (K_0 + K_a)\,\delta s + (M_0 + M_a)\,\delta\chi\,, \\ \delta A_e &= \delta A_{e_0} + \delta A_{ea} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

und entsprechend für die kinetische Energie

$$T = T_0 + T_a\,, \tag{36}$$

worin $K_a$ und $M_a$ aus den am Antrieb wirkenden eingeprägten Kräften zu bestimmen sind und $T_a$ der Zuwachs an kinetischer Energie ist, der sich bei Rotation des Antriebes ergibt (unter „Antrieb" seien alle zu berücksichtigenden rotierenden Motor- und Kraftübertragungsteile gemeint).

Entsprechend wird an Stelle der Bewegungsgleichungen (34) zunächst rein formal gesetzt

$$K \equiv K_0 + K_a \equiv k_0 + k_a\,, \quad M \equiv M_0 + M_a \equiv m_0 + m_a\,, \tag{37}$$

wobei aber keineswegs wegen (34) $K_a = k_a$, $M_a = m_a$ gefolgert werden darf. Denn auch wenn keine eingeprägten Kräfte auf den Antrieb einwirken, also auch bei $K_a = M_a = 0$, werden i. a. $k_a$ und $m_a \neq 0$ sein. Die Gleichungen (34) und (37) gelten nicht gleichzeitig, sondern in (37) bedeuten $k_a$ und $m_a$ nur eine Zusammenfassung derjenigen Glieder, die bei voll eingekuppeltem Motor zu den bereits bekannten, zu $k_0$ und $m_0$ zusammengefaßten, hinzutreten. Bei der Bestimmung dieser Zusatzglieder $k_a$ und $m_a$ wird genau so vorgegangen, wie bei der Ermittlung von $k_0$ und $m_0$.

Zur Kinematik des Antriebes ist zu sagen, daß die Bedingung des reinen Rollens die Einschaltung von 3 Ausgleichgetrieben zwischen Motor und den Rädern erforderlich macht. Nämlich je eins, das für den Ausgleich der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Vorder- bzw. der Hinterräder sorgt, und ein mittleres für den Ausgleich zwischen den beiden Antriebswellen, die von diesem zu den beiden anderen Ausgleichgetrieben führen.

Nun mögen von der Kurbelwelle bis zum mittleren Ausgleichgetriebe $m$ rotierende Teile zu berücksichtigen sein. Das Trägheitsmoment der $\nu$.Masse ($\nu = 1, 2 \ldots m$) um ihre Lagerachse sei $J_\nu$ und $\psi_\nu$ ihr Drehwinkel, wobei der positive Drehsinn so festgelegt sei, daß beim Vorwärtsfahren $\dot{\psi}_\nu > 0$ ist. Ferner seien $n$ bzw. $n_1$ Teile zwischen dem mittleren und dem vorderen bzw. hinteren Ausgleichgetriebe zu berücksichtigen. Die Drehwinkel dieser Teile seien mit $\psi_{V_\nu}$ bzw. $\psi_{H_\nu}$ und ihre Trägheitsmomente mit $J_{V_\nu}$ bzw. $J_{H_\nu}$ bezeichnet. Nun ist bekanntlich in einem Ausgleichgetriebe die Winkelgeschwindigkeit des Treibrades proportional der Summe aus den Winkelgeschwindigkeiten der beiden angetriebenen Wellen. Infolgedessen gilt

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi}_{V_\nu} &= \mu_{V_\nu}(\dot{\varphi} + \dot{\varphi}_2) && (\nu = 1, 2, \ldots n)\,, \\ \dot{\psi}_{H_\nu} &= \mu_{H_\nu}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_3) && (\nu = 1, 2, \ldots n_1)\,, \\ \dot{\psi}_\nu &= \mu_\nu(\dot{\varphi} + \dot{\varphi}_2) + \mu_{1\nu}\,(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_3) && (\nu = 1, 2, \ldots m)\,, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

mit konstanten positiven Koeffizienten $\mu$. Beim Auto ist gewöhnlich $r = r_1$, $\mu_\nu = \mu_{1\nu}$; es ist aber zweckmäßig, davon noch keinen Gebrauch zu machen, um später aus den Gleichungen des Vierrad-Antriebes ohne weiteres Hinter- und Vorderrad-Antrieb als Sonderfälle zu erhalten.

Für die Momentengleichung des Vorderradsystems ergibt sich jetzt folgendes: Zunächst folgt aus (35) für $\delta s = 0$

$$\delta A_{ea} = M_a \delta\chi \,. \tag{39}$$

Andererseits ist

$$\delta A_{ea} = \sum M_\nu \delta\psi_\nu + \sum M_{V\nu} \delta\psi_{V\nu} \,, \tag{40}$$

worin die $M_\nu$ und die $M_{V\nu}$ die an den betreffenden Teilen des Antriebes wirkenden eingeprägten Momente um deren Achsen sind. Von diesen Momenten ist nur eins ein antreibendes, nämlich das vom Gasdruck in den Zylindern herrührende, während alle anderen sich aus den Lagerreibungen und sonstigen Widerständen ergeben. Die kurze Rechnung ergibt

$$M_a = \frac{c}{r}\left(f(\chi) - 1\right) M_m \qquad \text{mit} \qquad M_m = \sum M_\nu \mu_\nu + \sum M_{V\nu} \mu_{V\nu} \,. \tag{41}$$

$M_m$ ist, wie man leicht nachweisen kann, im Gleichgewichtsfall gleich dem an jedem Vorderrad wirkenden Antriebsmoment. Außerdem ersieht man aus (41) noch etwas wichtiges. Beim Kraftwagen ist stets

$$|\chi| < \frac{\pi}{4} \,, \qquad \lambda < 1 \,, \qquad \text{also} \qquad f(\chi) \lesseqgtr 1 \,, \qquad \text{wenn} \qquad \chi \gtreqless 0 \,.$$

Im besonderen ist bei $\chi \ll 1$: $f(\chi) - 1 \approx -2\,\lambda\,\chi$, nach (41) also

$$M_a \approx -2\,\lambda \frac{c}{r} M_m \chi \,. \tag{42}$$

Nun ist bei antreibendem Motor bei der Vorwärtsfahrt $M_m > 0$, bei der Rückwärtsfahrt $M_m < 0$, was zur folgenden, nicht unwichtigen Erkenntnis führt:

Bedingt durch die kinematischen Verhältnisse des Vorderradsystems ist das Antriebsmoment beim Vierrad-Antrieb und beim Frontantrieb bestrebt, den Betrag des Winkels $\chi$ bei der Vorwärtsfahrt zu verkleinern, bei der Rückwärtsfahrt dagegen zu vergrößern.

Daß dieser Unterschied gegenüber dem Hinterradantrieb, bei dem ja $M_a = 0$ ist, durchaus von Bedeutung sein kann, wird sich in Ziff. 3., c) bei den Stabilitätsuntersuchungen der Geradeausfahrt zeigen.

Die Massenbeschleunigungsglieder $m_a$ und $k_a$ werden nun genau so ermittelt wie $m_0$ und $k_0$. Die hier übergangene Rechnung liefert mit den Abkürzungen

$$J_H = \sum J_\nu \mu_{1\nu}^2 + \sum J_{H\nu} \mu_{H\nu}^2 \,, \qquad J_V = \sum J_\nu \mu_\nu^2 + \sum J_{V\nu} \mu_{V\nu}^2 \,, \qquad J_M = \sum J_\nu \mu_\nu \mu_{1\nu} \tag{43}$$

folgendes:

$$\left.\begin{aligned}
k_{a_1}(\chi) &= \frac{J_H}{r_1^2}\left[4 + 2\,\lambda \sin 2\chi - (4 - \lambda^2)\sin^2\chi\right] + \\
&\quad + \frac{J_V}{r^2}\left[2 + \lambda \sin 2\chi + \lambda^2 \sin^2\chi + 2\sqrt{1 + \lambda \sin 2\chi + \lambda^2 \sin^2\chi}\right] + \\
&\quad + \frac{2\,J_M}{r\,r_1}(2\cos\chi + \lambda \sin\chi)\left(1 + \sqrt{1 + \lambda \sin 2\chi + \lambda^2 \sin^2\chi}\right), \\
k_{a_2}(\chi) &= \frac{J_H}{2\,r_1^2}\left[4\,\lambda\cos 2\chi - (4 - \lambda^2)\sin 2\chi\right] + \\
&\quad + \frac{J_V}{2\,r^2}\lambda(2\cos 2\chi + \lambda \sin 2\chi)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \sin 2\chi + \lambda^2 \sin^2\chi}}\right) + \\
&\quad + \frac{J_M}{r\,r_1}\left[\frac{\lambda}{2}\frac{2\cos 2\chi + \lambda \sin 2\chi}{\sqrt{1 + \lambda \sin 2\chi + \lambda^2 \sin^2\chi}}(2\cos\chi + \lambda\sin\chi) + \right. \\
&\quad \left. + (\lambda\cos\chi - 2\sin\chi)\left(1 + \sqrt{1 + \lambda \sin 2\chi + \lambda^2 \sin^2\chi}\right)\right], \\
k_{a_3}(\chi) &= -\frac{c}{r}\lambda\left[\frac{J_V}{r}\left(1 + \sqrt{1 + \lambda \sin 2\chi + \lambda^2 \sin^2\chi}\right) + \frac{J_M}{r_1}(2\cos\chi + \lambda\sin\chi)\right]\frac{\sin 2\chi + \lambda \sin^2\chi}{1 + \lambda \sin 2\chi + \lambda^2 \sin^2\chi}, \\
k_{a_4}(\chi) &= -\frac{c}{r}\lambda\left[\frac{J_V}{r}\left(1 + \sqrt{1 + \lambda \sin 2\chi + \lambda^2 \sin^2\chi}\right) + \frac{J_M}{r_1}(2\cos\chi + \lambda\sin\chi)\right]\frac{2\cos 2\chi + \lambda \sin 2\chi}{(1 + \lambda \sin 2\chi + \lambda^2 \sin^2\chi)^2},
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
m_{a_1}(\chi) &\equiv k_{a_1}(\chi)\,,\\
m_{a_2}(\chi) &\equiv -\frac{c}{r}\lambda\left[\frac{J_V}{2r}\lambda\,\frac{2\cos 2\chi+\lambda\sin 2\chi}{\sqrt{1+\lambda\sin 2\chi+\lambda^2\sin^2\chi}}+\frac{J_M}{r_1}(\lambda\cos\chi-2\sin\chi)\right]\frac{\sin 2\chi+\lambda\sin^2\chi}{1+\lambda\sin 2\chi+\lambda^2\sin^2\chi}\,,\\
m_{a_3}(\chi) &\equiv J_V\frac{c^2\lambda^2}{r^2}\,\frac{(\sin 2\chi+\lambda\sin^2\chi)^2}{(1+\lambda\sin 2\chi+\lambda^2\sin^2\chi)^2}\,,\\
m_{a_4}(\chi) &\equiv J_V\frac{c^2\lambda^2}{r^2}\,\frac{(2\cos 2\chi+\lambda\sin 2\chi)(\sin 2\chi+\lambda\sin^2\chi)}{(1+\lambda\sin 2\chi+\lambda^2\sin^2\chi)^3}\,.
\end{aligned}
\right\}\qquad (45)
$$

**Wir fassen zusammen: Bei voll eingekuppeltem Motor lauten die Bewegungsgleichungen der in dieser Arbeit behandelten Fahrzeuge**

$$K \equiv (k_{0_1}+k_{a_1})\,\dot v+(k_{0_2}+k_{a_2})\,v\,\dot\chi+(k_{0_3}+k_{a_3})\,\ddot\chi+(k_{0_4}+k_{a_4})\,\dot\chi^2\,. \qquad (46)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
M &\equiv M_L\,\psi'(\chi)+M_z-\frac{c}{r}M_\xi+f(\chi)\left(M_{z_2}+\frac{c}{r}M_{\xi_2}\right)+\frac{c}{r}(f(\chi)-1)\,M_m\\
&=(m_{0_1}+m_{a_1})\,\dot v+(m_{0_2}+m_{a_2})\,v\,\dot\chi+(m_{0_3}+m_{a_3})\,\ddot\chi+(m_{0_4}+m_{a_4})\,\dot\chi^2\,.
\end{aligned}
\right\}\qquad (47)
$$

**Ferner gilt für die kinetische Energie $T$:**

$$2\,T=(k_{0_1}+k_{a_1})\,v^2+2\,(k_{0_3}+k_{a_3})\,v\,\dot\chi+(m_{0_2}+m_{a_3})\,\dot\chi^2\,, \qquad (48)$$

**und es ist nach dem Energiesatz**

$$\dot T=K\,v+M\,\dot\chi\,. \qquad (49)$$

**In diesen Gleichungen beziehen sich die Koeffizienten mit dem Index $a$ auf die Teile des Antriebes, d. h. auf die rotierenden Motor- und Kraftübertragungsteile bis zu den Ausgleichgetrieben, diese mit einbegriffen. Für diese Koeffizienten gelten (44) und (45). Für die Koeffizienten mit dem Index 0, die sich auf das übrige Fahrzeug beziehen, gelten (32) und (33). Beim Frontantrieb sind in den Koeffizienten (44) und (45) $J_H$ und $J_M$ durch 0 zu ersetzen, beim Hinterrad-Antrieb dagegen $J_V$ und $J_M$. Demnach verschwinden beim Hinterradantrieb in den Bewegungsgleichungen (46) und (47) alle Koeffizienten mit dem Index $a$ bis auf $k_{a_1}$ und $k_{a_2}$; außerdem entfällt dann selbstverständlich das Antriebsmoment $M_m$.**

**Bei ausgekuppeltem oder nicht voll eingekuppeltem Motor zerfällt die Momentengleichung (47) in zwei Gleichungen, weil dann noch ein weiterer Freiheitsgrad hinzutritt. Eine dieser Gleichungen gilt für das Vorderradsystem und die damit verbundenen Teile des Antriebes bis zur Kupplung, die andere für die übrigen Antriebsteile. Aber nur in dieser kann der dritte Freiheitsgrad wegen der über den Antrieb getroffenen Voraussetzungen in Erscheingung treten, so daß sich an der Form der Kraftgleichung (46) und der Momentengleichung (47) des Vorderradsystems nichts ändert. Dort sind dann nur in den Koeffizienten mit dem Index $a$ alle Größen, die von den vor der Kupplung liegenden Motorteilen stammen, durch Null zu ersetzen. In den meisten Fällen können dann auch noch die in diesen Koeffizienten verbleibenden Glieder, die vom Schaltgetriebe, von den Ausgleichgetrieben und den Antriebswellen herrühren, vernachlässigt werden, so daß dann auf den rechten Seiten der Bewegungsgleichungen nur noch die Koeffizienten mit dem Index 0 auftreten. Somit gelten die bereits im Abschnitt g) aufgestellten rechten Seiten der Bewegungsgleichungen (34) auch bei laufendem, ausgekuppeltem Motor.**

**i) Über die Kraftkomponente $K$, soweit sie aus Antrieb, Rollwiderstand und Luftwiderstand resultiert. Während die Momentengröße $M$ in (47) bereits explizite in allgemeiner Form angegeben ist, sei jetzt noch die Kraftkomponente $K$ für die wichtigsten beim Kraftwagen zu berücksichtigenden eingeprägten Kräfte ermittelt.**

**1. Der Antrieb. Nach den Ausführungen des Abschnittes h) über den Antrieb gilt für die Leistung $L_a$ der am Antrieb wirkenden eingeprägten Kräfte (Antriebsmoment, Gleitreibungen und sonstige Widerstände) zunächst:**

$$L_a=\sum M_r\,\dot\psi_r+\sum M_{V_r}\,\dot\psi_{V_r}+\sum M_{H_r}\,\dot\psi_{H_r}\,. \qquad (50)$$

**Wegen (38) wird daraus**

$$L_a=M_m\,(\dot\varphi+\dot\varphi_2)+M_{1m}\,(\dot\varphi_1+\dot\varphi_3)\equiv K_a\,v+M_a\,\dot\chi \qquad (51)$$

**und durch Einsetzen der Bedingungsgleichungen (10)**

$$K_a=\frac{M_m}{r}\,(1+\sqrt{1+\lambda\sin 2\chi+\lambda^2\sin^2\chi})+\frac{M_{1m}}{r_1}\,(2\cos\chi+\lambda\sin\chi)\,. \qquad (52)$$

Hieraus wird näherungsweise für $\chi \ll 1$

$$K_a \approx \left(\frac{M_m}{r} + \frac{M_{1m}}{r_1}\right)(2 + \lambda\chi)\,. \tag{53}$$

2. Der Rollwiderstand. Wird die Größe des Momentes des Rollwiderstandes um die Radachse mit $M_r$ bezeichnet, ist die Leistung des Rollwiderstandes aller 4 Räder

$$L_r = -\left(M_r|\dot{\varphi}| + M_{r_1}|\dot{\varphi}_1| + M_{r_2}|\dot{\varphi}_2| + M_{r_3}|\dot{\varphi}_3|\right). \tag{54}$$

Durch Einsetzen der Bedingungsgleichungen (10) findet man für die Kraftkomponente $K_r$

$$\begin{aligned} K_r = -\operatorname{sgn} v\Bigg[&\frac{M_r}{r}\left(1 - \frac{c}{l}\sin\chi\right) + \frac{M_{r_2}}{r}\left|g(\chi) + \frac{c}{l}\sin\chi\right| \\ &+ \frac{M_{r_1}}{r_1}\left|\cos\chi - \frac{a}{l}\sin\chi\right| + \frac{M_{r_3}}{r_1}\left|\cos\chi + \frac{b}{l}\sin\chi\right|\Bigg], \end{aligned} \tag{55}$$

wobei beim Kraftwagen die Glieder mit $a/l$ und $c/l$ vernachlässigt werden können. Ist außerdem $\chi \ll 1$, lautet (55) näherungsweise

$$K_r \approx -\operatorname{sgn} v\left[\frac{1}{r}(M_r + M_{r_2}) + \frac{1}{r_1}(M_{r_1} + M_{r_3}) + \left(\frac{M_{r_2}}{r} + \frac{M_{r_3}}{r_1}\right)\lambda\chi\right]. \tag{56}$$

3. Der Luftwiderstand. In Abb. 4 sei $P_l$ diejenige Komponente des resultierenden Luftwiderstandes, die parallel zur Fahrebene gerichtet ist. Dann ist die Leistung $L_l$ des Luftwiderstandes

$$L_l = -P_l \cos\alpha\, v_D\,.$$

Nun ist $v_D = v_1 + e\,\dot{\vartheta}_1$, so daß sich wegen (10a, b) für die Kraftkomponente $K_l$ des Luftwiderstandes ergibt

$$K_l = -P_l \cos\alpha\left(\cos\chi + \frac{e}{l}\sin\chi\right), \tag{57}$$

und bei $\chi << 1$

$$K_l \approx -P_l \cos\alpha\left(1 + \frac{e}{l}\chi\right). \tag{58}$$

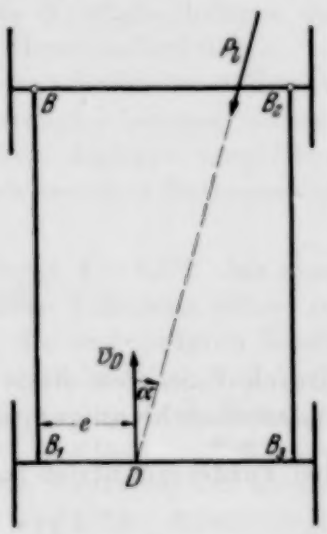

Abb. 4.

3. Beschränkung auf kleine Winkel $\chi$. a) Der allgemeine Fall. Die Bewegungsgleichungen werden bedeutend einfacher, wenn $\chi \ll 1$ ist, was beim Kraftwagen in der normalen Fahrt meistens der Fall ist. Entwickelt man die Koeffizienten (32), (33), (44) und (45) der Bewegungsgleichungen (46) und (47) nach Potenzen von $\chi$ und bricht hinter den linearen Gliedern ab, so findet man nach kurzer Zwischenrechnung

$$\left.\begin{aligned} k_{01} &= m_1 + 2\,(m_{F2} + \lambda\, m')\,\chi\,, & k_{02} &= m_{F2} + \lambda\, m' + \left(m_2 + \lambda^2\, m' + 2\,\lambda\frac{c}{r}\, m'\right)\chi\,, \\ k_{03} &= \left(2\,\frac{A'}{l} - \lambda\, c\, m'\right)\chi\,, & k_{04} &= -2\,\lambda\left[c\, m' + \left(\frac{A'}{l} - 2\,\lambda\, c\, m'\right)\chi\right], \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

$$\left.\begin{aligned} m_{01} &= k_{03}\,, & m_{02} &= 2\,\frac{A'}{l} + \lambda\, c\, m' - 2\,\lambda\left(\frac{A'}{l} + \lambda\, c\, m'\right)\chi\,, \\ m_{03} &= 2\,A'\,(1 - 2\,\lambda\chi)\,, & m_{04} &= -2\,\lambda\,A'\,(1 - 5\,\lambda\chi)\,, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

$$\left.\begin{aligned} k_{a1} &= 4\left(\frac{J_H}{r_1^2} + \frac{J_V}{r^2} + \frac{2\,J_M}{r\,r_1}\right)(1 + \lambda\chi)\,, \\ k_{a2} &= 2\,\lambda\left(\frac{J_H}{r_1^2} + \frac{J_V}{r^2} + \frac{2\,J_M}{r\,r_1}\right) + \left[\left(\frac{J_H}{r_1^2} + \frac{J_V}{r^2} + \frac{2\,J_M}{r\,r_1}\right)\lambda^2 - 4\left(\frac{J_H}{r_1^2} + \frac{J_M}{r\,r_1}\right)\right]\chi\,, \\ k_{a3} &= -4\,c\,\lambda\left(\frac{J_V}{r^2} + \frac{J_M}{r\,r_1}\right)\chi\,, \\ k_{a4} &= -2\,c\,\lambda\left(\frac{J_V}{r^2} + \frac{J_M}{r\,r_1}\right)(2 - 5\,\lambda\chi)\,, \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

$$\left.\begin{aligned} m_{a_1} &= k_{a_3}\,, & m_{a_2} &= -2\,c\,\lambda^2\left(\frac{J_V}{r^2}+\frac{J_M}{r\,r_1}\right)\chi\,,\\ m_{a_3} &= 0\,, & m_{a_4} &= 4\,\frac{c^2}{r^2}\,\lambda^2\,J_V\,\chi\,. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Ferner erhält man für die Momentengröße in (47)

$$M = M_L\,\psi'(\chi) + M_s + M_{s_2} + \frac{c}{r}\,(M_{\xi_2} - M_\xi) - 2\,\lambda\left[\frac{c}{r}\,(M_m + M_{\xi_2}) + M_{s_2}\right]\chi\,. \tag{63}$$

**b) Ein Zahlenbeispiel.** Um einen Überblick über die Größenordnungen der Koeffizienten $k$ und $m$ zu bekommen, sei nun ein Zahlenbeispiel durchgerechnet, und zwar mit Werten, wie sie bei einem mittleren Personenkraftwagen auftreten.

**Abmessungen:**

$l = 2{,}6$ m; $b' = 1{,}3$ m; $l_s = 1{,}3$ m; $s = 0{,}65$ m; $r = 0{,}34$ m; $c = 0{,}05$ m.

**Massen:**

$m = 130\ \mathrm{kgm^{-1}sec^2}$; $m_R = 2{,}5\ \mathrm{kgm^{-1}sec^2}$; $m_F = 125\ \mathrm{kgm^{-1}sec^2}$.

**Trägheitsmomente:**

$J_s = 230\ \mathrm{mkgsec^2}$ (Trägheitsmoment von $m_F$ um Vertikale durch Schwerpunkt von $m_F$); $C = 0{,}13\ \mathrm{mkgsec^2}$; $A = 0{,}065\ \mathrm{mkgsec^2}$.

**Antrieb** (nach einem Zahlenbeispiel von *W. Kamm* u. *C. Schmid* [1]):

| | $J_v$ cm kg sec² | Übersetzungsverhältnis: direkter Gang | 1. Gang |
|---|---|---|---|
| Motortrieb | 0,447 | 5,7 | 5,7 . 4,5 = 25,65 |
| Schwungrad | 3,04 | | |
| Kupplung | 0,090 | | |
| Getriebe und Gelenkwelle | 0,05 | | z. T. 25,65 |
| Ausgleichgetriebe | 0,60 | 1 | z. T. 5,7<br>1 |

Durch Einsetzen dieser Zahlen in die Beziehungen (59), (60), (61) und (62) ergibt sich für die Massenbeschleunigungsglieder der Bewegungsgleichungen (46) und (47)

bei Vorderradantrieb in direktem Gang

$$\begin{aligned} k_0 &= (134{,}5 + 67{,}2\,\chi)\,\dot v + (33{,}6 - 53{,}0\,\chi)\,v\,\dot\chi - 0{,}038\,\chi\,\ddot\chi - (0{,}181 - 0{,}155\,\chi)\,\dot\chi^2\,,\\ k_a &= (10{,}2 + 5{,}1\,\chi)\,\dot v + (2{,}55 + 0{,}64\,\chi)\,v\,\dot\chi - 0{,}255\,\chi\,\ddot\chi - (0{,}255 - 0{,}638\,\chi)\,\dot\chi^2\,, \end{aligned}$$

bei Vorderradantrieb im 1. Gang

$$k_a = (205 + 102\,\chi)\,\dot v + (51{,}2 + 12{,}8\,\chi)\,v\,\dot\chi - 5{,}12\,\chi\,\ddot\chi - (5{,}12 - 12{,}8\,\chi)\,\dot\chi^2\,, \tag{64}$$

bei Hinterradantrieb im direkten Gang

$$k_a = (10{,}2 + 5{,}1\,\chi)\,\dot v + (2{,}55 - 9{,}56\,\chi)\,v\,\dot\chi\,,$$

bei Hinterradantrieb im 1. Gang

$$k_a = (205 + 102\,\chi)\,\dot v + (51{,}2 - 192\,\chi)\,v\,\dot\chi\,,$$

bei Vorderradantrieb im direkten Gang

$$\begin{aligned} m_0 &= -0{,}0384\,\chi\,\dot v + (0{,}143 - 0{,}117\,\chi)\,v\,\dot\chi + (0{,}136 - 0{,}136\,\chi)\,\ddot\chi - (0{,}0678 - 0{,}170\,\chi)\,\dot\chi^2\,,\\ m_a &= -0{,}255\,\chi\,\dot v - 0{,}0638\,\chi\,v\,\dot\chi + 0{,}006\,\chi\,\dot\chi^2\,, \end{aligned} \tag{65}$$

bei Vorderradantrieb im 1. Gang

$$m_a = -5{,}12\,\chi\,\dot v - 0{,}128\,\chi\,v\,\dot\chi + 0{,}013\,\chi\,\dot\chi^2\,.$$

[1] *W. Kamm* und *C. Schmid*, Das Versuchs- und Meßwesen auf dem Gebiet des Kraftfahrzeugs, Berlin 1938.

Damit erhält man bei voll eingekuppeltem Motor die folgenden Bewegungsgleichungen:

Bei Vorderradantrieb im direkten Gang

$$\left.\begin{aligned} K &= (144{,}7 + 72{,}3\,\chi)\,\dot{v} + (36{,}2 - 52{,}4\,\chi)\,v\,\dot{\chi} - 0{,}293\,\chi\,\ddot{\chi} - (0{,}436 - 0{,}793\,\chi)\,\dot{\chi}^2\,, \\ M &= -0{,}293\,\chi\,\dot{v} + (0{,}143 - 0{,}181\,\chi)\,v\,\dot{\chi} + (0{,}136 - 0{,}136\,\chi)\,\ddot{\chi} - (0{,}0678 - 0{,}176\,\chi)\,\dot{\chi}^2\,. \end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Bei Vorderradantrieb im 1. Gang

$$\left.\begin{aligned} K &= (340 + 169\,\chi)\,\dot{v} + (84{,}8 - 40{,}2\,\chi)\,v\,\dot{\chi} - 5{,}16\,\chi\,\ddot{\chi} - (5{,}30 - 13{,}0\,\chi)\,\dot{\chi}^2\,, \\ M &= -5{,}16\,\chi\,\dot{v} + (0{,}143 - 0{,}245\,\chi)\,v\,\dot{\chi} + (0{,}136 - 0{,}136\,\chi)\,\ddot{\chi} - (0{,}0678 - 0{,}183\,\chi)\,\dot{\chi}^2\,. \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

Bei Hinterradantrieb im direkten Gang

$$K = (144{,}7 + 72{,}3\,\chi)\,\dot{v} + (36{,}2 - 62{,}6\,\chi)\,v\,\dot{\chi} - 0\,0384\,\chi\,\ddot{\chi} - (0{,}181 - 0{,}155\,\chi)\,\dot{\chi}^2\,,$$

im 1. Gang

$$\left.\begin{aligned} K &= (340 + 169\,\chi)\,\dot{v} + (84{,}8 - 245\,\chi)\,v\,\dot{\chi} - 0{,}0384\,\chi\,\ddot{\chi} - (0{,}181 - 0{,}155\,\chi)\,\dot{\chi}^2\,, \\ M &= m_0 = -0{,}0384\,\chi\,\dot{v} + (0{,}143 - 0{,}177\,\chi)\,v\,\dot{\chi} + (0{,}136 - 0{,}136\,\chi)\,\ddot{\chi} \\ &\qquad - (0{,}0678 - 0{,}170\,\chi)\,\dot{\chi}^2\,. \end{aligned}\right\} \quad (68)$$

Diese Zahlen zeigen folgendes: In den Kraftgleichungen beträgt der Anteil der Antriebsteile an den Gliedern mit $\dot{v}$ und $v\dot{\chi}$ beim Vorderradantrieb etwa $^1/_{15}$, dagegen an den Gliedern mit $\ddot{\chi}$ und $\dot{\chi}^2$ mehr als die Hälfte. Im ersten Gang entfällt auch bei den Gliedern mit $\dot{v}$ und $v\dot{\chi}$ mehr als die Hälfte auf den Antrieb, an dem allein die Schwungscheibe mit 85 % beteiligt ist; bei den Gliedern mit $\ddot{\chi}$ und $\dot{\chi}^2$ beträgt der Anteil des Antriebes fast 100 %. Die Kraftgleichungen des Vorderradantriebes unterscheiden sich von den entsprechenden des Hinterradantriebes im wesentlichen in den Gliedern mit $\ddot{\chi}$ und $\dot{\chi}^2$. Die geringste Rolle spielen diese Glieder beim Hinterradantrieb, die größte beim Frontantrieb im 1. Gang. In den Momentengleichungen machen sich die Antriebsteile in den Gliedern mit $v\dot{\chi}$, $\ddot{\chi}$ und $\dot{\chi}^2$ kaum bemerkbar, dagegen vergrößern sie den Betrag des Gliedes mit $\dot{v}$ im direkten Gang auf das 7,6fache des Leerlauf-Betrages und im 1. Gang sogar um das 134fache.

c) Ist die Geradeausfahrt mit konstanter Geschwindigkeit stabil? Als erste Anwendung sei folgender verhältnismäßig einfacher Fall untersucht: Das Fahrzeug fahre zunächst mit $\chi = 0$ und konstanter Geschwindigkeit $v = v_0$. Dann müssen die eingeprägten Kraftkomponenten $K$ und $M$ gleich 0 sein. An äußeren eingeprägten Kräften seien lediglich konstante Rollwiderstände und der Luftwiderstand zu berücksichtigen, der bei $v = v_0$ auch konstant sei, so daß dann auch die auf die Räder ausgeübten Antriebsmomente konstant sein müssen. Ist nun eine solche Bewegung stabil? Das soll hier heißen: Kommt das Fahrzeug bei kleinen Abweichungen von $\chi = 0$ und $v = v_0$ von selbst wieder auf $\chi = 0$ oder bedarf es dazu ständig einer Steuerung durch den Fahrer? Selbstverständlich hat eine solche Frage nur Sinn bei nicht selbsthemmenden leichtgängigen Steuerungen.

Wird für die Geschwindigkeit $v = v_0 + w$ gesetzt und wird in üblicher Weise angenommen, daß $\chi$ und $w$ samt ihren Ableitungen so klein sind, daß in den Bewegungsgleichungen alle Glieder fortgelassen werden können, die von höherer als erster Ordnung klein sind, so ergibt sich aus der Momentengleichung (47) unter Beachtung von (60) und (62)

$$M = \left(2\,\frac{A'}{l} + \lambda\,c\,m'\right) v_0\,\dot{\chi} + 2\,A'\,\ddot{\chi}\,. \quad (69)$$

Bei den vorausgesetzten kleinen Störungen spielen also die Teile des Antriebes noch keine Rolle. Für $M$ bekommt man aus (63), wenn dort $M_L = M_z = M_{z_2} = 0$ gesetzt wird und für die Momente um die Radachsen ($\zeta$- und $\xi_2$-Achsen) die beretis in (54) eingeführten Momente der Rollreibung eingesetzt werden:

$$M = -\frac{c}{r}\,(M_{r_2} - M_r) - 2\,\lambda\,\frac{c}{r}\,(M_m - M_{r_2})\,\chi\,. \quad (70)$$

Da aber bei $\chi = \dot{\chi} = \ddot{\chi} = 0$ auch $M = 0$ sein muß, müssen die als konstant angenommenen Momente der Rollwiderstände gleich groß sein, also $M_{r_2} = M_r$. Demnach entsteht aus (69) und (70)

$$2\,A'\,\ddot{\chi} + \left(2\,\frac{A'}{l} + \lambda\,cm'\right) v_0\,\dot{\chi} + 2\,\lambda\,\frac{c}{r}\,(M_m - M_{r_2})\,\chi = 0\,. \quad (71)$$

Das an jedem Vorderrad wirkende Antriebsmoment $M_m$ wird bei der gestörten Bewegung im allgemeinen nicht konstant bleiben. Da aber auch konstanter Luftwiderstand bei $v = v_0$ vorausgesetzt wurde, werden die Änderungen von $M_m$ um so kleiner sein, je kleiner die Abweichungen von der stationären Bewegung sind. Infolgedessen führen diese Änderungen in der Bewegungsgleichung (71) lediglich zu Größen, die von zweiter Ordnung klein sind, so daß sie fortgelassen werden können. Demnach ist in (71) für $M_m$ das bei $v = v_0$ und $\chi = 0$ wirkende konstante Antriebsmoment einzusetzen. Dann sind aber sämtliche Koeffizienten in der Bewegungsgleichung konstant, so daß nun (71) von der Kraftgleichung getrennt untersucht werden kann. Im Laufe der Zeit geht $\chi$ dann und nur dann gegen 0, wenn alle Koeffizienten gleiches Vorzeichen haben. Nun ist stets $A' > 0$, so daß also bei Stabilität auch

$$\left(2\,\frac{A'}{l} + \lambda\, c\, m'\right) v_0 > 0\,, \qquad \lambda\,\frac{c}{r}\,(M_m - M_{r_2}) > 0 \tag{72}$$

sein muß. Dieses trifft nur zu, wenn

$$v_0 > 0\,, \qquad M_m - M_{r_2} > 0\,, \tag{73}$$

also nur bei der Vorwärtsfahrt und beim Vierrad- oder Vorderrad-Antrieb, da beim Hinterradantrieb $M_m = 0$ zu setzen ist.

Auch hierzu ein Zahlenbeispiel, wobei sich wieder alle Werte auf das m-kg-sec-Maßsstem beziehen sollen. Mit den im Abschnitt b) benutzten Werten bekommt man für die ersten Glieder in (71)

$$2\,A'\,\ddot{\chi} + \left(2\,\frac{A'}{l} + \lambda\, c\, m'\right) v_0\,\dot{\chi} = 0{,}136\,\ddot{\chi} + 0{,}143\,v_0\,\dot{\chi}\,. \tag{74}$$

Im letzten Glied in (71) läßt sich das konstante Moment $M_m - M_{r_2}$, das bei $v = v_0$ und $\chi = 0$ wirksam ist, aus der Kraftgleichung bestimmen. Bei $\chi = 0$ und $v = v_0$ muß $K = 0$ sein. $K$ setzt sich hier zusammen aus der Antriebskraft $K_a$, dem Rollwiderstand $K_r$ und dem Luftwiderstand $K_l$. Nach den für diese Kräfte aufgestellten Beziehungen (53), (56) und (58) erhält man zunächst, wenn dort $\chi = 0$ gesetzt wird

$$\left.\begin{aligned} K &= K_a + K_r + K_l\,, \\ &= \frac{2}{r}\,(M_m + M_{1m}) - \frac{1}{r}\,(M_r + M_{r_2} + M_{r_1} + M_{r_3}) - P_l \cos\alpha = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Unter Beschränkung auf den einfachen Fall, daß alle Rollwiderstandsmomente gleich $M_r$ sind und der Anströmwinkel $\alpha \ll 1$ ist, entsteht aus (75) für den Vorderradantrieb ($M_{1m} = 0$):

$$M_m - M_{r_2} = M_r + \frac{r}{2}\,P_l\,. \tag{76}$$

Wird andererseits für den Rollwiderstand $K_r$ die einfachste Gesetzmäßigkeit zugrunde gelegt, daß er nämlich proportional dem Gesamtgewicht $G$ des Fahrzeuges ist, also $K_r = -f_r\,G$, mit konstantem „Rollwiderstandsbeiwert" $f_r$, so findet man durch Vergleich

$$M_r = r\,f_r\,\frac{G}{4}\,.$$

Als Beispiel sei $f_r = 0{,}03$ (Teerstraße) gewählt. Damit wird $M_r = 3{,}24$ mkg. Ferner wird für den Luftwiderstand $P_l$ einfach gesetzt:

$$P_l = \frac{\varrho}{2}\,v_0^2\,c_w\,F\,. \tag{77}$$

mit $\varrho$ als Luftdichte, $F$ als Fahrzeugquerschnittsfläche und $c_w$ als Widerstandsbeiwert. Bei mittlerem Luftdruck und mittlerer Temperatur ist $\varrho/2 = 0{,}0637$. Setzt man für einen mittleren Personenkraftwagen beispielsweise $c_w = 0{,}5$, $F = 3\ \mathrm{m}^2$, ergibt sich für den Luftwiderstand $P_l = 0{,}0955\,v_0^2$. Mit diesen Werten lautet (76)

$$M_m - M_{r_2} = 3{,}24 + 0{,}0162\,v_0^2\,.$$

Wird dieses und (74) in die Bewegungsgleichung (71) eingesetzt, kommt man bei Vorderradantrieb auf

$$\ddot{\chi} + 1{,}053\,v_0\,\dot{\chi} + (3{,}50 + 0{,}0175\,v_0^2)\,\chi = 0\,,$$

bei Hinterradantrieb auf

$$\ddot{\chi} + 1{,}053\,v_0\,\dot{\chi} - 3{,}50\,\chi = 0\,.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen lautet bekanntlich

$$\chi = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \qquad (\text{wenn } \lambda_1 \neq \lambda_2).$$

Führt man die Rechnung durch, ergeben sich folgende Vergleichswerte:

| $v_0$ km/h | $\lambda_1$ | | $\lambda_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| | V.-Antrieb | H.-Antrieb | V.-Antrieb | H.-Antrieb |
| 36 | −0,53 | +0,33 | −10,0 | −10,9 |
| 72 | −0,51 | +0,18 | −20,6 | −21,2 |
| 108 | −0,63 | +0,12 | −31 | −31,7 |

Demnach verschwindet das Glied mit $e^{\lambda_2 t}$ stets sehr schnell, aber auch das Glied mit $e^{\lambda_1 t}$ wird beim Vorderradantrieb schnell klein, nach etwa 4 sec beträgt es nur noch ungefähr $^1/_{10}$ seines Anfangswertes. Dagegen wächst beim Hinterradantrieb $e^{\lambda_1 t}$ ziemlich rasch, und zwar bei kleineren Geschwindigkeiten stärker.

**4. Über die kräftefreie Bewegung des vierrädrigen Wagens.** a) Die ersten Integrale der Bewegungsgleichungen. Für den gewöhnlichen vierrädrigen Wagen und die anderen in Ziff. 2., a) genannten Fahrzeuge mit $\lambda \equiv b'/l = 0$ vereinfachen sich die allgemeinen Bewegungsgleichungen ganz erheblich. (34) lautet dann einfach

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= (m_1 + m_{F_2} \sin 2\chi + m_2 \sin^2\chi)\,\dot v + \\ &\quad + \left(m_{F_2} \cos 2\chi + \frac{m_2}{2} \sin 2\chi\right) v\dot\chi + 2\,\frac{A'}{l} \sin\chi\,\ddot\chi\,, \end{aligned}\right| \tag{78}$$

$$M_0 = 2\,\frac{A'}{l} \sin\chi\,\dot v + 2\,\frac{A'}{l} \cos\chi\, v\dot\chi + 2\,A'\ddot\chi\,. \tag{79}$$

Diese Gleichungen lassen sich exakt lösen, wenn die eingeprägten Kraftkomponenten $K_0$ und $M_0$ ständig 0 sind, was z.B. der Fall ist, wenn das Fahrzeug auf horizontaler Ebene rollt und die Schwerkraft die einzige am Fahrzeug wirkende eingeprägte Kraft ist. Zunächst liefert der Energiesatz sofort ein Integral, denn bei $K_0 = 0$ und $M_0 = 0$ muß nach (29) die kinetische Energie $T_0$ konstant bleiben. Aus (48) erhält man

$$\text{konst.} = 2\,T_0 = (m_1 + m_{F_2} \sin 2\chi + m_2 \sin^2\chi)\,v^2 + 4\,\frac{A'}{l} \sin\chi\, v\dot\chi + 2\,A'\dot\chi^2\,. \tag{80}$$

Aber auch die Momentengleichung (79) läßt sich leicht einmal integrieren, denn statt (79) kann geschrieben werden

$$M_0 = 2\,A'\,\frac{d}{dt}\left(\dot\chi + \frac{v}{l} \sin\chi\right) = 0\,. \tag{81}$$

Hierin ist das zweite Glied in der Klammer nach der Bedingungsgleichung (10b) nichts anderes als die Winkelgeschwindigkeit $\dot\vartheta_1$ des Fahrgestelles. Ferner ist die Winkelgeschwindigkeit $\dot\vartheta$ des Vorderradgestelles um die Lenkachse $\dot\chi + \dot\vartheta_1$, so daß aus (81) einfach folgt

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= 2\,A'\,\ddot\vartheta = 0\,, \\ \dot\vartheta &= \omega = \text{konst.} = \dot\chi + \dot\vartheta_1 = \dot\chi + \frac{v}{l} \sin\chi\,. \end{aligned}\right| \tag{82}$$

b) Zwei Sonderfälle. Aus (80) und (82) lassen sich sofort zwei Sonderfälle ablesen:

1. $\omega = 0$, $\vartheta = \text{konst.}$

Das Vorderradgestell bewegt sich geradlinig, so daß der Punkt $B_1$ die bekannte *Huygens*sche Traktrix beschreibt.

2. $\omega \neq 0$, $\qquad \chi = \chi_0 = \text{konst.}$, $\qquad v = \text{konst.}$

Das Fahrzeug bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit $v$ auf einer Kreisbahn, und es ist nach (82)

$$v = \frac{l}{\sin\chi_0}\,\omega\,.$$

Hierin kann $l/\sin\chi_0$ nichts anderes als der Halbmesser des von der Lenkachse durchfahrenen Kreises sein, was ein Blick auf Abb. 1 sofort bestätigt.

c) Ein weiterer interessanter Sonderfall. Von nun ab sei stets $\omega \neq 0$, $\dot{\chi} \neq 0$ vorausgesetzt. Setzt man in (80) $\dot{\chi} = \omega - \dot{\vartheta}_1$ und $v = (l/\sin\chi)\,\dot{\vartheta}_1$ nach (10b), bekommt man nach kurzer Rechnung

$$\dot{\vartheta}_1 = \frac{v_0}{l}\,\frac{\sin\chi}{+\sqrt{1-2\varkappa\sin^2\chi+\mu\sin 2\chi}} = \omega - \dot{\chi} \tag{83}$$

mit den Abkürzungen

$$v_0 = +\sqrt{\frac{2\,T_0 - 2\,A'\omega^2}{m_1}}\,, \qquad \varkappa = -\frac{m_{F_3}}{2\,m_1} < \frac{1}{2}\,, \qquad \mu = \frac{m_{F_2}}{m_1}\,. \tag{84}$$

Hiermit ergibt sich

$$v = \frac{v_0}{+\sqrt{1-2\varkappa\sin^2\chi+\mu\sin 2\chi}}\,. \tag{85}$$

Untersucht man nun die Systemkonstanten $\varkappa$ und $\mu$, so sieht man, daß der Fall $\varkappa = 0$, $\mu = 0$ durchaus vorkommen kann. In diesem Sonderfall muß aber nach (85) die Geschwindigkeit $v$ der Lenkachse während der ganzen Bewegung konstant bleiben. Das bedeutet, da ja außerdem auch die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$ des Vorderradgestelles konstant bleibt, daß die Lenkachse mit konstanter Geschwindigkeit $v_0$ einen Kreis beschreibt. In diesem Falle läßt sich auch die Differentialgleichung (83) für $\chi$ ohne weiteres lösen, so daß man dann imstande ist, die Schleppkurve irgend eines Punktes des Fahrgestelles zu bestimmen, also beispielsweise des Schnittpunktes $B_1$ von Längsachse und Hinterradachse. Die im Abschnitt e) durchgeführte Rechnung führt, wie die Abb. 5 und 7 zeigen, zu zwei wesentlich voneinander verschiedenen Typen von Schleppkurven, je nachdem ob $l$ kleiner oder größer als der Halbmesser $\varrho$ des von der Lenkachse beschriebenen Kreises ist $\left(\tau = \frac{\varrho}{l}\right)$.

d) Zur Integration im allgemeinen Falle ($\varkappa \neq 0$, $\mu \neq 0$). Aus (83) ergibt sich

$$\dot{\chi} = \omega\,\frac{+\sqrt{1-2\varkappa\sin^2\chi+\mu\sin 2\chi} - \tau\sin\chi}{+\sqrt{1-2\varkappa\sin^2\chi+\mu\sin 2\chi}} \quad \text{mit } \tau = \frac{v_0}{l\omega}\,. \tag{86}$$

Durch Trennen der Variablen bekommt man

$$\omega t = \vartheta = \int \frac{+\sqrt{1-2\varkappa\sin^2\chi+\mu\sin 2\chi}}{+\sqrt{1-2\varkappa\sin^2\chi+\mu\sin 2\chi} - \tau\sin\chi}\,d\chi \tag{87}$$

und durch einfache Umformung

$$\left.\begin{aligned} \omega t = \vartheta &= J_1 + \tau\,J_2\,, \\ \text{mit} \\ J_1 &= \frac{1}{2}\int \frac{1-\varkappa+\varkappa\cos 2\chi+\mu\sin 2\chi}{1-\sigma+\sigma\cos 2\chi+\mu\sin 2\chi}\,d(2\chi)\,, \\ J_2 &= \int \frac{\sin\chi\sqrt{1-\varkappa+\varkappa\cos 2\chi+\mu\sin 2\chi}}{1-\sigma+\sigma\cos 2\chi+\mu\sin 2\chi}\,d\chi\,, \\ 2\sigma &\equiv 2\varkappa + \tau^2 \equiv 2\varkappa + \frac{v_0^2}{l^2\omega^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Die allgemeine Lösung von $J_1$ kann aus jeder Formelsammlung entnommen werden. Auch $J_2$ ist elementar lösbar; denn die Substitution $\operatorname{tg}\chi = z$ liefert

$$J_2 = \int \frac{z\,[1+2\mu z+(1-2\varkappa)\,z^2]}{(1+z^2)\,[1+2\mu z+(1-2\sigma)\,z^2]}\,\frac{1}{\sqrt{1+2\mu z+(1-2\varkappa)\,z^2}}\,dz\,. \tag{89}$$

Dieses Integral läßt sich durch Aufspaltung in Partialbrüche auf Integrale von der Form

$$\int \frac{dz}{(z-a)^\nu\sqrt{1+2\mu z+(1-2\sigma)\,z^2}} \qquad (\nu > 0\,,\ \text{ganzzahlig})\,,$$

zurückführen, die elementar lösbar sind. Die allgemeine praktische Durchrechnung ist aber sehr umständlich und dürfte ziemlich umfangreich werden. Deshalb wird sie in dieser Arbeit nicht durchgeführt. Nur der Fall $\mu = 0$ läßt sich ohne große Schwierigkeiten vollständig durchrechnen, denn bei $\mu = 0$ führt die Substitution $z^2 = u$ auf erheblich einfachere Integrale.

e) Die Lösungen des Falles $\mu = 0$. 1. Der Sonderfall $\varkappa = 0$. Nach (87) ist

$$\vartheta = \int \frac{d\psi}{1 + \tau \cos\psi}, \quad \psi = \chi + \frac{\pi}{2}, \quad \tau = \frac{v_0}{l\omega}. \tag{90}$$

Nun hat sich schon im Abschnitt c) gezeigt, daß in diesem Sonderfall die Lenkachse mit konstanter Geschwindigkeit $v_0$ einen Kreis durchfährt. Für den Halbmesser $\varrho$ dieses Kreises gilt dann offensichtlich $\varrho = v_0/\omega$. Demnach ist $\tau = \varrho/l$. Als Lösung von (90) ergibt sich für

$$\tau < 1: \quad \vartheta = \frac{2}{\sqrt{1-\tau^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right), \tag{91}$$

$$\tau = 1: \quad \vartheta = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}, \tag{92}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau > 1: \quad \vartheta &= \frac{2}{\sqrt{\tau^2-1}} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(\sqrt{\frac{\tau-1}{\tau+1}} \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right), \\ &\text{wenn die Spitze der Schleppkurve außerhalb des Kreises liegt, sonst} \\ \vartheta &= \frac{2}{\sqrt{\tau^2-1}} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(\sqrt{\frac{\tau+1}{\tau-1}} \operatorname{tg}\frac{\psi_1}{2}\right), \quad \psi_1 = \frac{\pi}{2} - \chi. \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

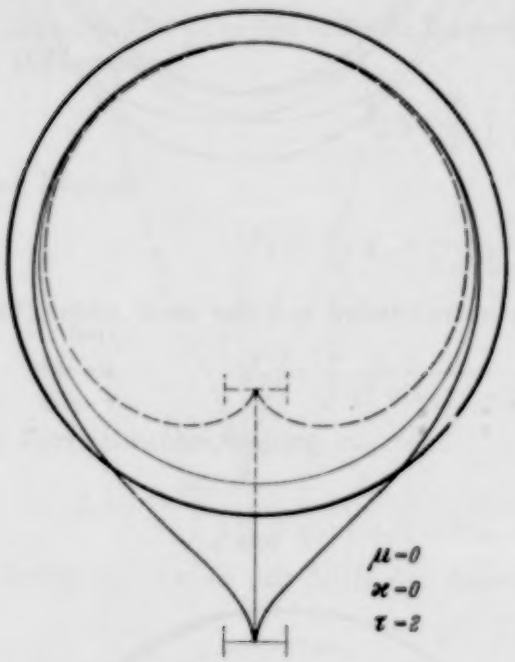


Abb. 5.

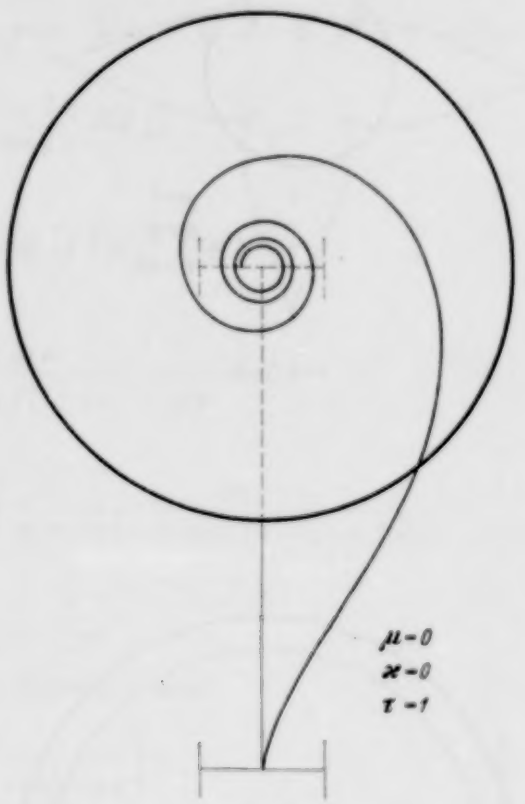


Abb. 6.

Abb. 5 u. 6. Bahnen der Lenkachse und Schleppkurven.

Hiernach sind die Schleppkurven in den Abb. 5, 6 und 7 berechnet worden. Abb. 6 zeigt die Schleppkurve im Grenzfalle $\varrho = l$ für 4 volle Umläufe des Vorderradgestelles; mit $t \to \infty$ führt die Schleppkurve zum Kreismittelpunkt.

2. Der Sonderfall $2\sigma \equiv 2\varkappa + \tau^2 = 0$, d. h. $\tau \equiv \frac{v_0}{l\omega} = \sqrt{-2\varkappa}$, $\varkappa < 0$. Aus (88) wird

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2}\int (1 - \varkappa + \varkappa\cos 2\chi)\, d(2\chi), \\ J_2 &= \int \sin\chi \sqrt{1 - 2\varkappa + 2\varkappa\cos^2\chi}\, d\chi. \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

Das erste Integral läßt sich sofort lösen:

$$J_1 = (1-\varkappa)\chi + \frac{\varkappa}{2}\sin 2\chi. \tag{95}$$

beim zweiten liegt die Substitution $\cos\chi = z$ nahe. Damit wird

$$J_2 = -\int \sqrt{1 - 2\varkappa + 2\varkappa z^2}\, dz$$

mit der Lösung

$$J_2 = -\frac{1}{2}\cos\chi\sqrt{1 - 2\varkappa\sin^2\chi} - \frac{1-2\varkappa}{2\sqrt{-2\varkappa}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{-2\varkappa}{1-2\varkappa}}\cos\chi\right). \qquad (96)$$

Hiermit bekommt man für $\vartheta = J_1 + \tau J_2$, wenn wieder zum Winkel $\psi = \chi + \frac{\pi}{2}$ übergegangen

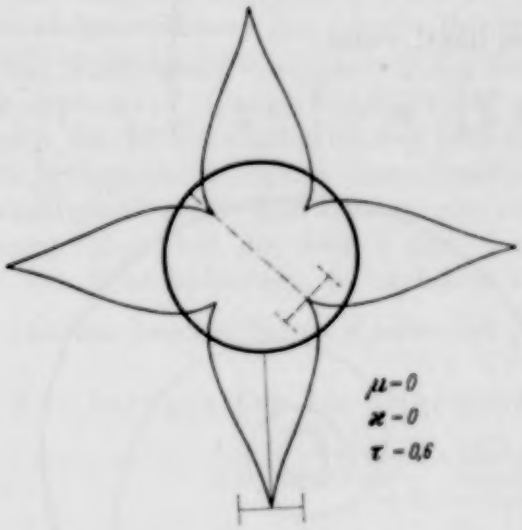


Abb. 7.

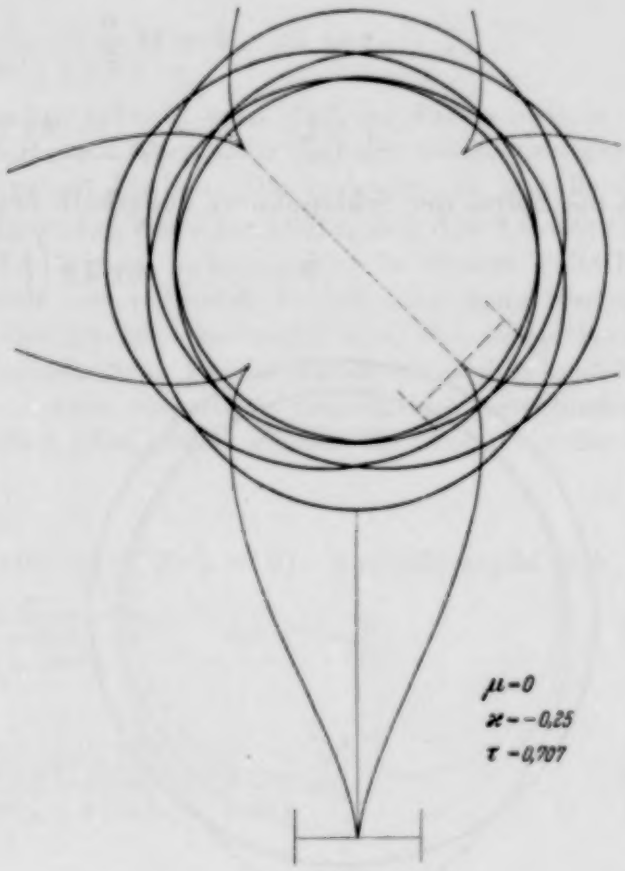


Abb. 8.

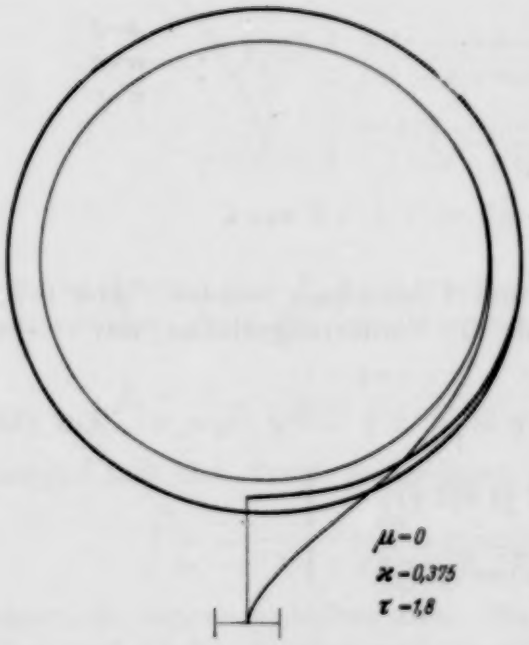


Abb. 9.

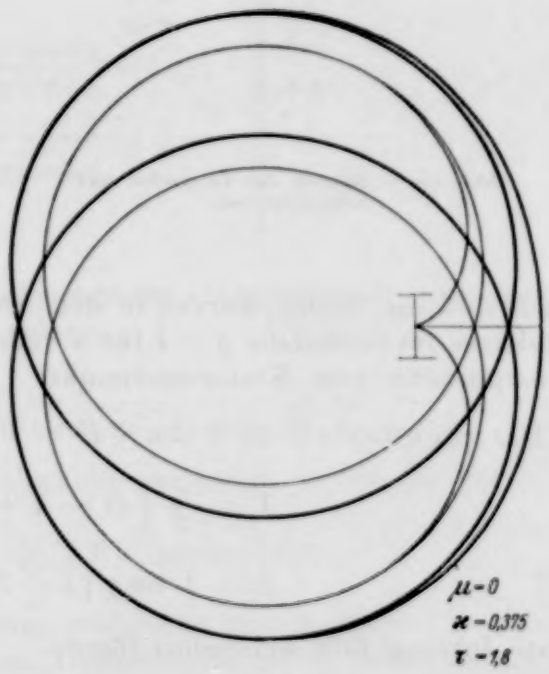


Abb. 10.

Abb. 7–10. Bahnen der Lenkachse und Schleppkurven.

wird,

$$\vartheta = (1-\varkappa)\,\psi + \frac{-\varkappa}{2}\sin 2\psi - \frac{\sqrt{-2\varkappa}}{2}\sin\psi\sqrt{1-2\varkappa\cos^2\psi} - \frac{1-2\varkappa}{2}\arcsin\left(\sqrt{\frac{-2\varkappa}{1-2\varkappa}}\sin\psi\right). \quad (97)$$

Nun kann die Bahnkurve der Lenkachse errechnet werden; denn aus

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{d\vartheta}\,\omega = v\cos\vartheta\,, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{d\vartheta}\,\omega = v\sin\vartheta \end{aligned}\right| \quad (98)$$

bekommt man nach (85)

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{l} &= \tau\int\frac{\cos\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{1-2\varkappa\sin^2\chi+\mu\sin 2\chi}}\,, \\ \frac{y}{l} &= \tau\int\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{1-2\varkappa\sin^2\chi+\mu\sin 2\chi}}\,. \end{aligned}\right\} \quad (99)$$

Hiermit wurde das Beispiel $\varkappa = -0{,}25$, also $\tau = \sqrt{0{,}5} = 0{,}707$ zahlenmäßig durchgerechnet. Die Bahnkurve der Lenkachse (s. Abb. 8) wurde durch numerische Integration von (99) berechnet.

3. Die nichtperiodischen Bewegungen mit $2\sigma > 1$, d. h. $\tau^2 > 1-2\varkappa$. Gleichung (88) ergibt

$$J_1 = \frac{1}{2}\int\frac{1-\varkappa+\varkappa\cos 2\chi}{1-\sigma+\sigma\cos 2\chi}\,d(2\chi)$$

mit der Lösung

$$J_1 = \frac{\varkappa}{\sigma}\chi + \frac{\tau^2}{2\sigma\sqrt{2\sigma-1}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(\sqrt{2\sigma-1}\,\mathrm{tg}\,\chi\right). \quad (100)$$

Aus (89) erhält man mit der Substitution $z^2 = u$

$$J_2 = \int\frac{1+(1-2\varkappa)u}{(1+u)[1+(1-2\sigma)u]\sqrt{1+(1-2\varkappa)u}}\,du\,. \quad (101)$$

Durch Partialbruchzerlegung entsteht

$$J_2 = \frac{\varkappa}{\sigma}\int\frac{du}{2(1+u)\sqrt{1+(1-2\varkappa)u}} + \frac{\tau^2}{2\sigma}\int\frac{du}{2[1+(1-2\sigma)u]\sqrt{1+(1-2\varkappa)u}}\,. \quad (102)$$

Diese Integrale werden mit Hilfe der Substitution

$$\sqrt{1+(1-2\varkappa)\,u} = w \quad (103)$$

gelöst. Die Ergebnisse der hier übergegangenen Rechnung lauten

$$\left.\begin{aligned} \vartheta = \frac{\varkappa}{\sigma}\psi + \frac{\tau^2}{2\sigma\sqrt{2\sigma-1}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{\sqrt{2\sigma-1}\sin\psi}{\tau\sqrt{1-2\varkappa\cos^2\psi}+(1-2\varkappa)\cos\psi}\right) + \\ + \left\{\begin{aligned} &-\frac{\tau\sqrt{2\varkappa}}{2\sigma}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(\sqrt{\frac{2\varkappa}{1-2\varkappa}}\sin\psi\right), \quad \text{wenn } \varkappa > 0\,, \\ &+\frac{\tau\sqrt{-2\varkappa}}{2\sigma}\arcsin\left(\sqrt{\frac{-2\varkappa}{1-2\varkappa}}\sin\psi\right), \quad \text{wenn } \varkappa < 0\,, \end{aligned}\right\}, \quad \psi = \frac{\pi}{2}+\chi\,, \end{aligned}\right\} \quad (104)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \vartheta = -\frac{\varkappa}{\sigma}\psi_1 + \frac{\tau^2}{2\sigma\sqrt{2\sigma-1}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(\frac{\sqrt{2\sigma-1}\sin\psi_1}{\tau\sqrt{1-2\varkappa\cos^2\psi_1}-(1-2\varkappa)\cos\psi_1}\right) + \\ + \left\{\begin{aligned} &-\frac{\tau\sqrt{2\varkappa}}{2\sigma}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(\sqrt{\frac{2\varkappa}{1-2\varkappa}}\sin\psi_1\right), \quad \text{wenn } \varkappa > 0\,, \\ &+\frac{\tau\sqrt{-2\varkappa}}{2\sigma}\arcsin\left(\sqrt{\frac{-2\varkappa}{1-2\varkappa}}\sin\psi_1\right), \quad \text{wenn } \varkappa < 0 \end{aligned}\right\}, \quad \psi_1 = \frac{\pi}{2}-\chi\,. \end{aligned}\right\} \quad (105)$$

Mit (104) wurden die Kurven der Abb. 9 berechnet und mit (105) Abb. 10, und zwar mit $\varkappa = 3/8$, $\tau^2 = 3{,}25$, also $\sigma = 2$.

4. Die periodischen Bewegungen mit $2\sigma < 1$, d.h. $\frac{v_0^2}{l^2\omega^2} < 1 - 2\varkappa$. Für diese bekommt man wegen

$$-i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,(i\,z) = \operatorname{arctg} z$$

ohne weiteres aus (104)

$$\left.\begin{aligned}\vartheta = \frac{\varkappa}{\sigma}\,\psi + \frac{\tau^2}{2\sigma\sqrt{1-2\sigma}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{1-2\sigma}\sin\psi}{\tau\sqrt{1-2\varkappa\cos^2\psi}+(1-2\varkappa)\cos\psi}\right) + \\ + \begin{cases} -\tau\dfrac{\sqrt{2\varkappa}}{2\sigma}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(\sqrt{\dfrac{2\varkappa}{1-2\varkappa}}\sin\psi\right), & \text{wenn } \varkappa > 0\,, \\ +\tau\dfrac{\sqrt{-2\varkappa}}{2\sigma}\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{-2\varkappa}{1-2\varkappa}}\sin\psi\right), & \text{wenn } \varkappa < 0\,. \end{cases}\end{aligned}\right\} \quad (106)$$

5. Der Grenzfall $2\sigma = 1$, d.h. $\tau^2 \equiv \frac{v_0^2}{l^2\omega^2} = 1 - 2\varkappa$. In diesem Fall nimmt das zweite Glied in (104) die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Die Anwendung der *Bernoulli-L'Hospital*schen Regel ergibt dann

$$\left.\begin{aligned}\vartheta = 2\varkappa\,\psi + \frac{\tau\sin\psi}{\sqrt{1-2\varkappa\cos^2\psi}+\tau\cos\psi} + \\ + \begin{cases} -\sqrt{2\varkappa}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(\dfrac{\sqrt{2\varkappa}}{\tau}\sin\psi\right), & \text{wenn } \varkappa > 0\,, \\ +\sqrt{-2\varkappa}\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{-2\varkappa}}{\tau}\sin\psi\right), & \text{wenn } \varkappa < 0\,. \end{cases}\end{aligned}\right\} \quad (107)$$

Für $\varkappa = 0$ wird hieraus wegen $\tau = 1$

$$\vartheta = \frac{\sin\psi}{1+\cos\psi} = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\,,$$

wie es nach (92) sein muß.

(Eingegangen am 12. April 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Bernd Stückler*, Berlin-Steglitz, Mariendorfer Str. 32 b.

# Zur Berechnung der Randstörungen kreiszylindrischer Tonnenschalen.

Von W. Zerna.

**1. Einleitung.** Die elastizitätstheoretische Berechnung des Spannungs- und Verformungszustandes kreiszylindrischer Tonnenschalen — einer für das Bauwesen bedeutsamen Schalenform — läßt sich nach der Membrantheorie in einfacher Weise erledigen, die allerdings im allgemeinen nicht die gewünschten Randbedingungen längs der begrenzenden Erzeugenden zu erfüllen gestattet. Die von den Rändern ausgehenden Störungen des Membranspannungszustandes können nur mit Hilfe der Biegetheorie erfaßt werden, was nach den bekannten Theorien [1] auf nicht unerhebliche Schwierigkeiten stößt.

In neuerer Zeit durchgeführte Untersuchungen über Schalen [2] allgemein und Zylinderschalen [3] im besonderen erlauben nun die Entwicklung einer wesentlich einfacheren Theorie zur Berechnung des Randstörungsproblems kreiszylindrischer Tonnenschalen, worüber nachfolgend berichtet werden soll.

**2. Elastizitätsgesetz und Gleichgewichtsbedingungen.** Die Schalenmittelfläche einer kreiszylindrischen Tonnenschale sei in üblicher Weise durch Zylinderkoordinaten $x$ und $\varphi$ beschrieben, der Krümmungshalbmesser der Mittelfläche sei $a$, die Spannweite zwischen den aussteifenden Binderscheiben $l$ (Abb. 1).

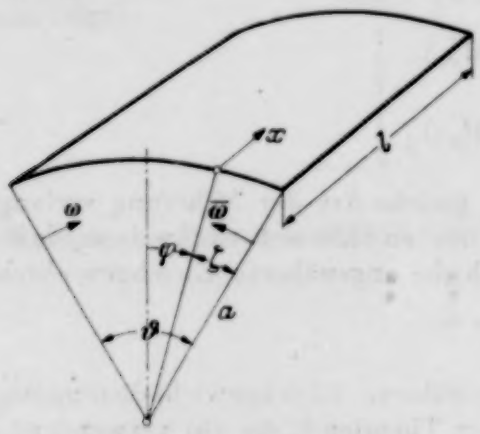


Abb. 1. Mittelfläche mit Koordinaten und Abmessungen.

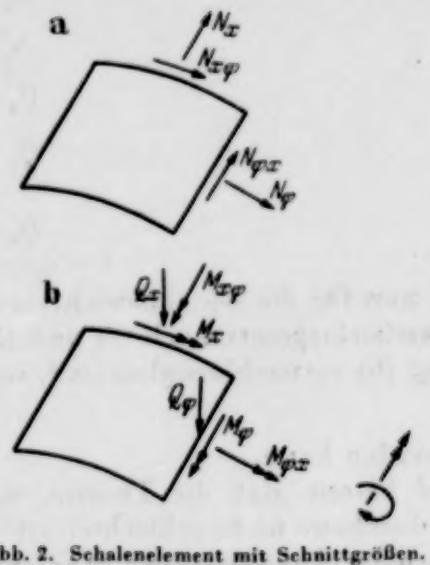


Abb. 2. Schalenelement mit Schnittgrößen. a) Längskräfte, b) Momente und Querkräfte.

Die Schnittgrößen, deren Bedeutung und positiver Wirkungssinn aus Abb. 2 ohne weiteres ersichtlich ist, werden wie folgt bezeichnet:

$$\begin{aligned} N_\varphi,\ N_x &= \text{Längskräfte},\\ N_{x\varphi},\ N_{\varphi x} &= \text{Schubkräfte},\\ Q_\varphi,\ Q_x &= \text{Querkräfte},\\ M_\varphi,\ M_x &= \text{Biegemomente},\\ M_{x\varphi},\ M_{\varphi x} &= \text{Drillungsmomente}. \end{aligned}$$

Die Ableitungen nach $\varphi$ und $x/a$ seien durch Punkte und Striche gekennzeichnet.

Bedeuten $u$, $v$, $w$ die Verschiebungen eines Punktes der Schalenmittelfläche in Richtung der Koordinaten $x$, $\varphi$ und der Normalenrichtung (positiv nach außen), so lassen sich die Dehnungen $\varepsilon_\varphi$, $\varepsilon_x$ und die Gleitung $\gamma_{x\varphi}$ der Mittelfläche durch

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\dot v}{a} + \frac{w}{a}, \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{u'}{a}, \qquad \gamma_{x\varphi} = \frac{u^{\cdot}}{a} + \frac{v'}{a} \tag{1}$$

ausdrücken.

[1] Vgl. *U. Finsterwalder*, Ing.-Arch. 4 (1933), S. 43; *F. Dischinger*, Beton u. Eisen 34 (1935), S. 257; *A. Aas-Jacobsen*, Bauing. 20 (1939), S. 394.

[2] Vgl. *A. E. Green* und *W. Zerna*, Quart. Journ. Mech. and Applied Math. 3 (1950), S. 9.

[3] *R. S. Jenkins*, Modern Building Techniques, Bulletin No. 1, London 1947.

Für das Elastizitätsgesetz, das den Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und den Verschiebungen angibt, ergibt sich als erste Näherung die Form [1]

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi &= D(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_x)\,, \\ N_x &= D(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_\varphi)\,, \\ N_{\varphi x} &= N_{x\varphi} = D\frac{1-\mu}{2}\gamma_{x\varphi}\,, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} M_\varphi &= \frac{B}{a^2}(w^{\cdot\cdot} + \mu w'')\,, \\ M_x &= \frac{B}{a^2}(w'' + \mu w^{\cdot\cdot})\,, \\ M_{x\varphi} &= M_{\varphi x} = \frac{B}{a^2}(1-\mu)w^{\cdot\prime}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Darin ist $\mu$ die Querkontraktionsziffer und $D$ und $B$ bedeuten die Dehnungs- und Biegungssteifigkeiten, die sich unter Verwendung des Elastizitätsmodul $E$, sowie der Schalendicke $t$ gemäß

$$D = \frac{Et}{1-\mu^2}\,, \qquad B = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \tag{4}$$

berechnen.

Die exakten Gleichgewichtsbedingungen der unbelasteten Schale lauten [2]

$$N_x' + N_{\varphi x}^{\cdot} = 0\,, \tag{5}$$

$$N_\varphi^{\cdot} + N_{x\varphi}' - Q_\varphi = 0\,. \tag{6}$$

$$Q_\varphi^{\cdot} + Q_x' + N_\varphi = 0\,, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_\varphi &= \frac{1}{a}(M_\varphi^{\cdot} + M_{x\varphi}')\,, \\ Q_x &= \frac{1}{a}(M_x' + M_{\varphi x}^{\cdot})\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Wird nun für die Gleichgewichtsbedingungen die gleiche Art der Näherung verlangt, wie sie beim Elastizitätsgesetz nach (2) und (3) vorhanden ist, so läßt sich nachweisen, daß $Q_\varphi$ in der Gleichung (6) vernachlässigbar ist [3], so daß (6) durch die angenäherte Gleichgewichtsbedingung

$$N_\varphi^{\cdot} + N_{x\varphi}' = 0 \tag{9}$$

ersetzt werden kann.

Es sei betont, daß die Theorie, welche die angenäherte Gleichgewichtsbedingung (9) verwendet, durchaus nicht schlechter ist als die üblichen Theorien [4], die (6) verwenden; denn die grundlegenden Annahmen der Schalentheorie bedingen ohne dies nur eine erste Näherung, die aber in den üblichen Theorien nicht konsequent durchgeführt worden ist.

**3. Differentialgleichung.** Die beiden Gleichgewichtsbedingungen (5) und (9) werden durch den Ansatz

$$N_x = \Phi^{\cdot\cdot}\,, \qquad N_\varphi = \Phi''\,, \qquad N_{x\varphi} = -\Phi^{\cdot\prime} \tag{10}$$

identisch erfüllt. Darin ist $\Phi$ eine Spannungsfunktion. Aus (2) folgt

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= \frac{N_\varphi - \mu N_x}{D(1-\mu^2)}\,, \\ \varepsilon_x &= \frac{N_x - \mu N_\varphi}{D(1-\mu^2)}\,, \\ \gamma_{x\varphi} &= \frac{2N_{x\varphi}}{D(1-\mu)} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

und aus (1) die Identität

$$\varepsilon_\varphi'' + \varepsilon_x^{\cdot\cdot} - \gamma_{x\varphi}^{\cdot\prime} - \frac{w''}{a} = 0\,. \tag{12}$$

[1] Vgl. *R. S. Jenkins*, a. a. O. und *A. E. Green* und *W. Zerna*, a. a. O. Die in die Schalentheorie eingeführten grundlegenden Annahmen lassen alle Verfeinerungen des Elastizitätsgesetzes durch Hinzunahme weiterer Glieder wenig sinnvoll erscheinen.

[2] Vgl. *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen, S. 110. Berlin 1934.

[3] Vgl. *R. S. Jenkins*, a. a. O.

[4] Vgl. Fußnote 1 S. 357.

Einführung von (10) in (11) und dies dann in (12) liefert

$$\Delta\Delta\Phi - \frac{D(1-\mu^2)}{a} w'' = 0\,, \tag{13}$$

wenn $\Delta \equiv a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ den *Laplace*schen Operator bezeichnet.

Mit (13) ist eine Differentialgleichung für die Spannungsfunktion $\Phi$ und die Normalverschiebung $w$ gefunden. Um eine weitere Gleichung zu erhalten, wird (8) in (7) eingesetzt. Dies ergibt wenn noch (3) und die zweite Gleichung (10) berücksichtigt werden

$$\Delta\Delta w + \frac{a^3}{B} \Phi'' = 0\,. \tag{14}$$

Die beiden Differentialgleichungen (13) und (14) bilden ein System homogener partieller Differentialgleichungen vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten zur Bestimmung der beiden unbekannten Funktionen $\Phi$ und $w$. Die beiden Differentialgleichungen werden zweckmäßig durch eine einzige ersetzt. Um sie zu erhalten, kann wie folgt vorgegangen werden. Die Gleichung (13) wird mit einem konstanten Faktor $k$ multipliziert, dann werden beide Gleichungen addiert. Dies ergibt

$$\Delta\Delta(w + k\Phi) - \frac{D(1-\mu^2)k}{a}\left(w - \frac{a^4}{BD(1-\mu^2)k}\Phi\right)'' = 0\,. \tag{15}$$

Der Faktor $k$ soll nun so bestimmt werden, daß

$$k = -\frac{a^4}{BD(1-\mu^2)k}$$

ist, woraus folgt

$$k = iK$$

mit

$$K = \left(\frac{a}{t}\right)^2 \frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{E}\,, \quad i = \sqrt{-1}\,. \tag{16}$$

Mit Einführung der komplexen Funktion

$$\Psi = w + iK\Phi \tag{17}$$

und

$$\varepsilon^2 = \frac{t}{a\sqrt{12(1-\mu^2)}} \tag{18}$$

wird aus (15)

$$\Delta\Delta\Psi - \frac{i}{\varepsilon^2}\Psi'' = 0\,. \tag{19}$$

Dies ist eine komplexe Differentialgleichung vierter Ordnung, die das hier betrachtete Problem der Kreiszylinderschale beschreibt. Ist die Funktion $\Psi$ gefunden, so liefert gemäß (17) ihr Realteil die Normalverschiebung $w$ und ihr Imaginärteil die Spannungsfunktion $\Phi$. Damit sind dann aber nach (3), (8), (10), (11) auch alle übrigen Schnitt- und Verschiebungsgrößen bekannt.

**4. Lösung der Differentialgleichung.** Für die praktische Rechnung ist es zweckmäßig, die Koordinaten $\xi = x/l$ und $\eta = \varphi/\vartheta$ einzuführen, wobei $l$ die Trägerspannweite und $\vartheta$ den Öffnungswinkel der Schale angibt (Abb.1). Die Differentialgleichung (19) läßt sich durch den Ansatz

$$\Psi = C_{mn} e^{m\eta} \sin n\pi\xi \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots) \tag{20}$$

befriedigen, worin $C_{mn}$ komplexe Konstanten sind. Wird (20) in (19) eingesetzt, so ergibt sich die Bestimmungsgleichung für $m$ zu

$$m^4 - 2\left(\frac{n\pi\vartheta a}{l}\right)^2 m^2 + \left(\frac{\vartheta a}{l}\right)^4 (n\pi)^2 \left[(n\pi)^2 + \frac{i l^2 \sqrt{12(1-\mu^2)}}{a t}\right] = 0\,. \tag{21}$$

Dies ist eine biquadratische Gleichung, deren Lösung sich leicht angeben läßt. Es ist

$$m_{1\atop 2} = \alpha_{1\atop 2} \mp i\beta_{1\atop 2}\,, \qquad m_{3\atop 4} = -\alpha_{1\atop 2} \pm i\beta_{1\atop 2} \tag{22}$$

mit

$$\alpha_{\frac{1}{2}} = \gamma\, p_{\frac{1}{2}}\,, \qquad \beta_{\frac{1}{2}} = \gamma\, q_{\frac{1}{2}}\,. \tag{23}$$

Darin bedeutet

$$\gamma = \frac{n\,\vartheta\,a}{l}\,, \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} p_{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}\left[\sqrt{\pi^2 \pm \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}} + \pi \pm \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}\right]}\,, \\ q_{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}\left[\sqrt{\pi^2 \pm \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}} - \pi \mp \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}\right]}\,, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\lambda = \frac{n}{l}\sqrt[4]{\frac{t\,a}{\sqrt{12\,(1-\mu^2)}}}\,. \tag{26}$$

In den Diagrammen der Abb.3 sind $p_{\frac{1}{2}}$, $q_{\frac{1}{2}}$ in Abhängigkeit von $\lambda$ aufgetragen.

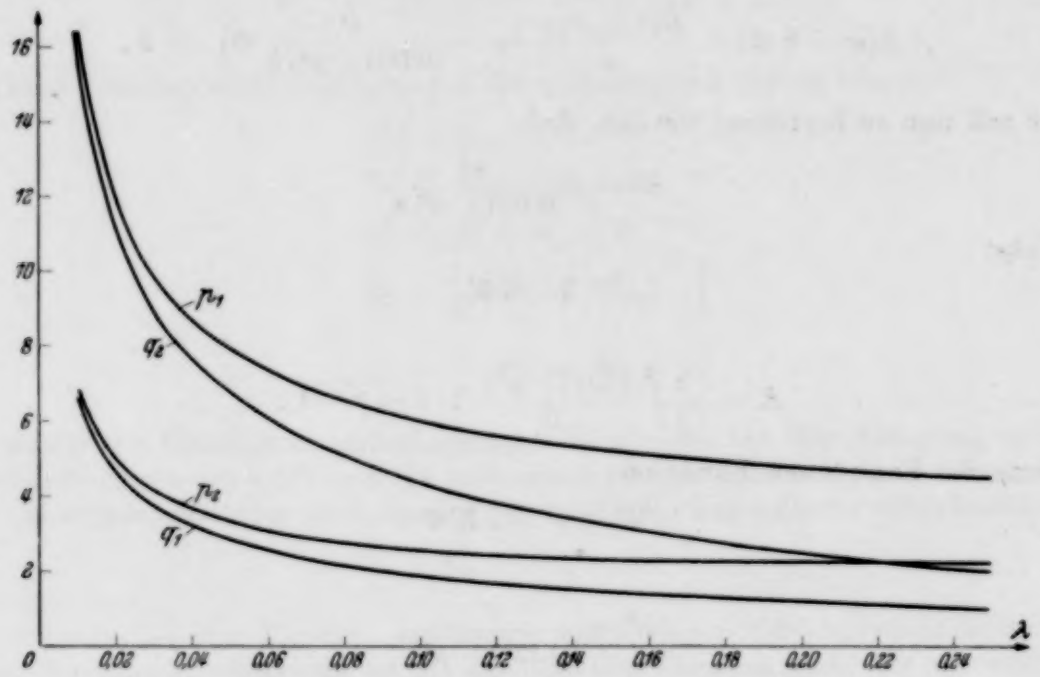


Abb. 3. Diagramme zur Lösung der Differentialgleichung.

Werden die von den Rändern zählenden Winkel $\omega = \frac{\varphi}{\vartheta} + \frac{\vartheta}{2\,\vartheta} = \eta + \frac{1}{2}$ und $\bar{\omega} = \frac{\zeta}{\vartheta}$ (Abb. 1) eingeführt und wird (22) in (20) eingesetzt und schließlich Realteil und Imaginärteil getrennt, so ergibt sich schließlich für $w$ und $K\Phi$ die Darstellung

$$\begin{aligned} w = \{&e^{-\alpha_1\bar{\omega}}\,(B_1\cos\beta_1\,\bar{\omega} + B_2\sin\beta_1\,\bar{\omega}) + e^{-\alpha_2\bar{\omega}}\,(B_3\cos\beta_2\,\bar{\omega} + B_4\sin\beta_2\,\bar{\omega}) + \\ &+ e^{-\alpha_1\omega}\,(B_5\cos\beta_1\,\omega + B_6\sin\beta_1\,\omega) + e^{-\alpha_2\omega}\,(B_7\cos\beta_2\,\omega + B_8\sin\beta_2\,\omega)\}\sin n\pi\xi\,, \\ K\Phi = \{&e^{-\alpha_1\bar{\omega}}\,(B_1\sin\beta_1\,\bar{\omega} - B_2\cos\beta_1\,\bar{\omega}) + e^{-\alpha_2\bar{\omega}}\,(-B_3\sin\beta_2\,\bar{\omega} + B_4\cos\beta_2\,\bar{\omega}) + \\ &+ e^{-\alpha_1\omega}\,(B_5\sin\beta_1\,\omega - B_6\cos\beta_1\,\omega) + e^{-\alpha_2\omega}\,(-B_7\sin\beta_2\,\omega + B_8\cos\beta_2\,\omega)\}\sin n\pi\xi\,. \end{aligned}$$

Daraus folgen dann die Schnitt- und Verschiebungsgrößen für $\mu = 0$ zu

$$\left.\begin{aligned} N_\varphi = -(\gamma\pi)^2\,[&e^{-\alpha_1\bar{\omega}}\,(B_1\sin\beta_1\,\bar{\omega} - B_2\cos\beta_1\,\bar{\omega}) + e^{-\alpha_2\bar{\omega}}\,(-B_3\sin\beta_2\,\bar{\omega} + B_4\cos\beta_2\,\bar{\omega}) + \\ &+ e^{-\alpha_1\omega}\,(B_5\sin\beta_1\,\omega - B_6\cos\beta_1\,\omega) + e^{-\alpha_2\omega}\,(-B_7\sin\beta_2\,\omega + B_8\cos\beta_2\,\omega)]\sin n\pi\xi\,, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} N_{x\varphi} = -\gamma\pi\,[&e^{-\alpha_1\bar{\omega}}\,(B_1^1\sin\beta_1\,\bar{\omega} - B_2^1\cos\beta_1\,\bar{\omega}) + e^{-\alpha_2\bar{\omega}}\,(-B_3^1\sin\beta_2\,\bar{\omega} + B_4^1\cos\beta_2\,\bar{\omega}) + \\ &+ e^{-\alpha_1\omega}\,(B_5^1\sin\beta_1\,\omega - B_6^1\cos\beta_1\,\omega) + e^{-\alpha_2\omega}\,(-B_7^1\sin\beta_2\,\omega + B_8^1\cos\beta_2\,\omega)]\cos n\pi\xi\,, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$N_x = \left[e^{-\alpha_1\bar{\omega}}(B_1^2\sin\beta_1\bar{\omega} - B_2^2\cos\beta_1\bar{\omega}) + e^{-\alpha_1\bar{\omega}}(-B_3^2\sin\beta_2\bar{\omega} + B_4^2\cos\beta_2\bar{\omega}) + \right.$$
$$\left. + e^{-\alpha_1\omega}(B_5^2\sin\beta_1\omega - B_6^2\cos\beta_1\omega) + e^{-\alpha_2\omega}(-B_7^2\sin\beta_2\omega + B_8^2\cos\beta_2\omega)\right]\sin n\pi\xi, \tag{29}$$

$$Q_\varphi = \frac{t}{\vartheta a\sqrt{12}}\left\{e^{-\alpha_1\bar{\omega}}(B_1^3\cos\beta_1\bar{\omega} + B_2^3\sin\beta_1\bar{\omega}) + e^{-\alpha_1\bar{\omega}}(B_3^3\cos\beta_2\bar{\omega} + B_4^3\sin\beta_2\bar{\omega}) + \right.$$
$$+ e^{-\alpha_1\omega}(B_5^3\cos\beta_1\omega + B_6^3\sin\beta_1\omega) + e^{-\alpha_2\omega}(B_7^3\cos\beta_2\omega + B_8^3\sin\beta_2\omega)\Big| -$$
$$-(\gamma\pi)^2\left[e^{-\alpha_1\bar{\omega}}(B_1^1\cos\beta_1\bar{\omega} + B_2^1\sin\beta_1\bar{\omega}) + e^{-\alpha_2\bar{\omega}}(B_3^1\cos\beta_2\bar{\omega} + B_4^1\sin\beta_2\bar{\omega}) + \right.$$
$$\left.\left. + e^{-\alpha_1\omega}(B_5^1\cos\beta_1\omega + B_6^1\sin\beta_1\omega) + e^{-\alpha_2\omega}(B_7^1\cos\beta_2\omega + B_8^1\sin\beta_2\omega)\right]\right\}\sin n\pi\xi, \tag{30}$$

$$Q_x = \frac{t}{\vartheta a\sqrt{12}}\gamma\pi\left\{e^{-\alpha_1\bar{\omega}}(B_1^2\cos\beta_1\bar{\omega} + B_2^2\sin\beta_1\bar{\omega}) + e^{-\alpha_2\bar{\omega}}(B_3^2\cos\beta_2\bar{\omega} + B_4^2\sin\beta_2\bar{\omega}) + \right.$$
$$+ e^{-\alpha_1\omega}(B_5^2\cos\beta_1\omega + B_6^2\sin\beta_1\omega) + e^{-\alpha_2\omega}(B_7^2\cos\beta_2\omega + B_8^2\sin\beta_2\omega)\Big| -$$
$$-(\gamma\pi)^2\left[e^{-\alpha_1\bar{\omega}}(B_1\cos\beta_1\bar{\omega} + B_2\sin\beta_1\bar{\omega}) + e^{-\alpha_2\bar{\omega}}(B_3\cos\beta_2\bar{\omega} + B_4\sin\beta_2\bar{\omega}) + \right.$$
$$\left.\left. + e^{-\alpha_1\omega}(B_5\cos\beta_1\omega + B_6\sin\beta_1\omega) + e^{-\alpha_2\omega}(B_7\cos\beta_2\omega + B_8\sin\beta_2\omega)\right]\right\}\cos n\pi\xi, \tag{31}$$

$$M_\varphi = \frac{t}{\sqrt{12}}\left[e^{-\alpha_1\bar{\omega}}(B_1^2\cos\beta_1\bar{\omega} + B_2^2\sin\beta_1\bar{\omega}) + e^{-\alpha_2\bar{\omega}}(B_3^2\cos\beta_2\bar{\omega} + B_4^2\sin\beta_2\bar{\omega}) + \right.$$
$$\left. + e^{-\alpha_1\omega}(B_5^2\cos\beta_1\omega + B_6^2\sin\beta_1\omega) + e^{-\alpha_2\omega}(B_7^2\cos\beta_2\omega + B_8^2\sin\beta_2\omega)\right]\sin n\pi\xi, \tag{32}$$

$$M_{x\varphi} = \frac{t}{\sqrt{12}}\gamma\pi\left[e^{-\alpha_1\bar{\omega}}(B_1^1\cos\beta_1\bar{\omega} + B_2^1\sin\beta_1\bar{\omega}) + e^{-\alpha_2\bar{\omega}}(B_3^1\cos\beta_2\bar{\omega} + B_4^1\sin\beta_2\bar{\omega}) + \right.$$
$$\left. + e^{-\alpha_1\omega}(B_5^1\cos\beta_1\omega + B_6^1\sin\beta_1\omega) + e^{-\alpha_2\omega}(B_7^1\cos\beta_2\omega + B_8^1\sin\beta_2\omega)\right]\cos n\pi\xi, \tag{33}$$

$$M_x = -\frac{t}{\sqrt{12}}(\gamma\pi)^2\left[e^{-\alpha_1\bar{\omega}}(B_1\cos\beta_1\bar{\omega} + B_2\sin\beta_1\omega) + e^{-\alpha_2\bar{\omega}}(B_3\cos\beta_2\bar{\omega} + B_4\sin\beta_2\bar{\omega}) + \right.$$
$$\left. + e^{-\alpha_1\omega}(B_5\cos\beta_1\omega + B_6\sin\beta_1\omega) + e^{-\alpha_2\omega}(B_7\cos\beta_2\omega + B_8\sin\beta_2\omega)\right]\sin n\pi\xi, \tag{34}$$

$$Etu = -\frac{\vartheta a}{\gamma\pi}\left[e^{-\alpha_1\bar{\omega}}(B_1^2\sin\beta_1\bar{\omega} - B_2^2\cos\beta_1\bar{\omega}) + e^{-\alpha_2\bar{\omega}}(-B_3^2\sin\beta_2\bar{\omega} + B_4^2\cos\beta_2\bar{\omega}) + \right.$$
$$\left. + e^{-\alpha_1\omega}(B_5^2\sin\beta_1\omega - B_6^2\cos\beta_1\omega) + e^{-\alpha_2\omega}(-B_7^2\sin\beta_2\omega + B_8^2\cos\beta_2\omega)\right]\cos n\pi\xi, \tag{35}$$

$$Et\frac{\partial u}{\partial x} = \left[e^{-\alpha_1\bar{\omega}}(B_1^2\sin\beta_1\bar{\omega} - B_2^2\cos\beta_1\bar{\omega}) + e^{-\alpha_2\bar{\omega}}(-B_3^2\sin\beta_2\bar{\omega} + B_4^2\cos\beta_2\bar{\omega}) + \right.$$
$$\left. + e^{-\alpha_1\omega}(B_5^2\sin\beta_1\omega - B_6^2\cos\beta_1\omega) + e^{-\alpha_2\omega}(-B_7^2\sin\beta_2\omega + B_8^2\cos\beta_2\omega)\right]\sin n\pi\xi, \tag{36}$$

$$Etv = -\vartheta a\left\{2\left[e^{-\alpha_1\bar{\omega}}(B_1^1\sin\beta_1\bar{\omega} - B_2^1\cos\beta_1\bar{\omega}) + e^{-\alpha_2\bar{\omega}}(-B_3^1\sin\beta_2\bar{\omega} + B_4^1\cos\beta_2\bar{\omega}) + \right.\right.$$
$$+ e^{-\alpha_1\omega}(B_5^1\sin\beta_1\omega - B_6^1\cos\beta_1\omega) + e^{-\alpha_2\omega}(-B_7^1\sin\beta_2\omega + B_8^1\cos\beta_2\omega)\Big| +$$
$$-\frac{1}{(\gamma\pi)^2}\left[e^{-\alpha_1\bar{\omega}}(B_1^3\sin\beta_1\bar{\omega} - B_2^3\cos\beta_1\bar{\omega}) + e^{-\alpha_2\bar{\omega}}(-B_3^3\sin\beta_2\bar{\omega} + B_4^3\cos\beta_2\bar{\omega}) + \right.$$
$$\left.\left.\left. + e^{-\alpha_1\omega}(B_5^3\sin\beta_1\omega - B_6^3\cos\beta_1\omega) + e^{-\alpha_2\omega}(-B_7^3\sin\beta_2\omega + B_8^3\cos\beta_2\omega)\right]\right\}\sin n\pi\xi, \tag{37}$$

$$Etw = \frac{(\vartheta a)^2\sqrt{12}}{t}\left[e^{-\alpha_1\bar{\omega}}(B_1\cos\beta_1\bar{\omega} + B_2\sin\beta_1\bar{\omega}) + e^{-\alpha_2\omega}(B_3\cos\beta_2\bar{\omega} + B_4\sin\beta_2\bar{\omega}) + \right.$$
$$\left. + e^{-\alpha_1\omega}(B_5\cos\beta_1\omega + B_6\sin\beta_1\omega) + e^{-\alpha_2\omega}(B_7\cos\beta_2\omega + B_8\sin\beta_2\omega)\right]\sin n\pi\xi, \tag{38}$$

$$Et\frac{\partial w}{\partial\varphi} = \frac{\vartheta a^2\sqrt{12}}{t}\left[e^{-\alpha_1\bar{\omega}}(B_1^1\cos\beta_1\bar{\omega} + B_2^1\sin\beta_1\bar{\omega}) + e^{-\alpha_2\bar{\omega}}(B_3^1\cos\beta_2\bar{\omega} + B_4^1\sin\beta_2\bar{\omega}) + \right.$$
$$\left. + e^{-\alpha_1\omega}(B_5^1\cos\beta_1\omega + B_6^1\sin\beta_1\omega) + e^{-\alpha_2\omega}(B_7^1\cos\beta_2\omega + B_8^1\sin\beta_2\omega)\right]\sin n\pi\xi. \tag{39}$$

Die darin auftretenden Konstanten $B_i^{\mu}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$; $i = 1, 2, \ldots 8$) lassen sich aus folgenden Rekursionsformeln bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} B_{\substack{1\\2}}^{\mu} &= \alpha_1 B_{\substack{1\\2}}^{\mu-1} \mp \beta_1 B_{\substack{2\\1}}^{\mu-1} & B_{\substack{3\\4}}^{\mu} &= \alpha_2 B_{\substack{3\\4}}^{\mu-1} \mp \beta_2 B_{\substack{4\\3}}^{\mu-1}, \\ B_{\substack{5\\6}}^{\mu} &= -\alpha_1 B_{\substack{5\\6}}^{\mu-1} \pm \beta_1 B_{\substack{6\\5}}^{\mu-1} & B_{\substack{7\\8}}^{\mu} &= -\alpha_2 B_{\substack{7\\8}}^{\mu-1} \pm \beta_2 B_{\substack{8\\7}}^{\mu-1}. \end{aligned}\right| \qquad (40)$$

Darin ist für $B_i^0 = B_i$ zu setzen.

**5. Zusammenfassung.** Die Ermittlung des Spannungs- und Verformungszustandes an den Rändern belasteter kreiszylindrischer Tonnenschalen wird auf eine komplexe Differentialgleichung vierter Ordnung zurückgeführt. Der Realteil der Lösungsfunktion liefert die Normalverschiebung, der Imaginärteil eine Spannungsfunktion. Durch diese beiden Größen lassen sich die übrigen Schnitt- und Verschiebungsgrößen ausdrücken. Die Lösung der Differentialgleichung führt auf eine biquadratische Gleichung, deren zahlenmäßige Ergebnisse sich aus Diagrammen ablesen lassen. Es werden dann für die Schnitt- und Verschiebungsgrößen explizite Formeln angegeben.

(Eingegangen am 21. Mai 1952.)

Anschrift des Verfassers: Privatdozent Dr.-Ing. *W. Zerna*, Hannover, Edenstraße 30.

## Einführung in die Technische Thermodynamik und in die Grundlagen der Chemischen Thermodynamik.

Von Dr.-Ing. **Ernst Schmidt**, o. Professor und Direktor des Instituts für Wärmetechnik an der Technischen Hochschule Braunschweig. Vierte überarbeitete und erweiterte Auflage. Mit 244 Abbildungen und 69 Tabellen sowie 3 Dampftafeln als Anlage. XVI, 520 Seiten. 1950.

Ganzleinen DM 30.—

Die schnelle Entwicklung der Technik in den letzten Jahrzehnten hat eine erweiterte Anwendung der Thermodynamik auf vielen Gebieten zur Folge gehabt. Bei dieser Sachlage entstand der Wunsch nach einer zusammenfassenden Darstellung des unter dem Namen „angewandte Thermodynamik" stehenden Wissensgebietes. Das vorliegende Buch trägt diesem Wunsche Rechnung. Die Tatsache, daß es nach kurzer Zeit bereits in vierter Auflage erscheint, zeigt, daß sein Aufbau dem Bedürfnis der Ingenieure entspricht. In 21 Abschnitten, die reich mit Abbildungen und Tafeln ausgestattet sind, ist der Stoff gegliedert. In dem reichen Inhalt sind die Grundlagen besonders entwickelt. Viele Beispiele vertiefen die Beherrschung des Stoffes und erleichtern die Lösung der im einzelnen behandelten Probleme. Zahlreiche Zahlenangaben erleichtern die Durchführung von Rechnungen, so daß das Buch auch in dieser Beziehung einen geschlossenen Aufbau zeigt. Von den Sonderabschnitten sei hier nur auf die Behandlung der Strömungsmaschinen, der Wärmeübertragung und die Anwendung der Thermodynamik auf chemische Vorgänge hingewiesen . . .

*„Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure"*

## Die Grundlagen der angewandten Thermodynamik.

Von Dr.-Ing. habil. **Kurt Nesselmann**, *Wiesbaden*. Mit 311 Abbildungen und 5 Diagrammen im Text. XI, 320 Seiten. 1950.

Ganzleinen DM 18.—

Das Buch führt zunächst durch Behandlung der wichtigsten thermodynamischen Grundbegriffe und Grundgesetze über vollkommene und unvollkommene Gase und Dämpfe, über die strömende Bewegung von Gasen und Dämpfen, über den Entropiebegriff und II. Hauptsatz der Wärmelehre den Leser in das Wesen der Materie ein, um ihn zu thermodynamischem Denken zu erziehen. Angesichts der beabsichtigten Beschränkung des Werkes auf einen mäßigen Umfang bespricht der Verfasser dabei nur das Grundsätzliche der verschiedenen Beziehungen und Prozesse und verzichtet bewußt auf die Darstellung technischer Einzelheiten . . .

Die Darstellung des umfangreichen Stoffes ist trotz mancher Schwierigkeit der Materie und trotz der räumlichen Beschränkung, die sich der Verfasser auferlegt, leicht verständlich, wobei zahlreiche gute Abbildungen, Diagramme und praktische Rechenbeispiele wertvolle Dienste leisten. Für ein eingehenderes Studium sind im Text genügend viele Hinweise auf die neueste Fachliteratur enthalten, so daß das Buch nicht nur Studierenden, sondern auch Ingenieuren, der Praxis zu empfehlen ist. Ausstattung des Werkes ist mustergültig.

*„Heizung — Lüftung — Haustechnik"*

## Leitfaden der Technischen Wärmelehre nebst Anwendungsbeispielen.

Von Dr.-Ing. habil. **Hugo Richter**, Gummersbach. Mit 384 Abbildungen, 1 Diagramm und 104 Zahlentafeln im Text und Anhang. XII, 617 Seiten. 1950. Ganzleinen DM 34.50.

Das gut ausgestattete Werk bringt in seinem Hauptteil die Grundlagen der Technischen Wärmelehre: Die Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten der Stoffe und Dampfgemische, die Wärmesätze, Zustandsänderungen und Kreisprozesse, Wärmeinhalt und Entropie, ferner Strömungslehre, Wärmeübertragung und Verbrennung. Ohne zu hoch gegriffene Voraussetzungen wird der Leser mit der mathematischen Behandlung der Probleme vertraut gemacht und bis an den gegenwärtigen Stand herangeführt. Das Buch eignet sich daher sowohl zum Selbststudium, dem zahlreich eingestreute Anwendungsbeispiele entgegenkommen, wie auch zur Ergänzung der Kenntnisse für den im Berufsleben stehenden Ingenieur, und kann als zuverlässiger Führer hierzu bestens empfohlen werden. Durch die zahlreichen Tabellen und Diagramme stellt es zugleich ein wertvolles Handbuch und Nachschlagewerk dar . . .

*„Kältetechnik"*

## Wärmeübertragung im Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom.

Von Dr.-Ing. **Helmuth Hausen**, o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover. (Bildet Band VIII von „Technische Physik in Einzeldarstellungen".) Mit 230 Textabbildungen. XII, 464 Seiten. 1950.

DM 69.—; Ganzleinen DM 73.—

. . . Das außerordentlich klar und flüssig geschriebene Buch wird jedem etwas geben: Der Wissenschaftler, der sich vor allem für die Theorie der Wärmeübertragung und der Apparate interessiert, wird nicht nur viele Anregungen finden, sondern auch die Eleganz bewundern, mit der hier die Mathematik dienstbar gemacht worden ist. Der Praktiker wird dagegen angenehm überrascht sein, wie einfach sich auch die schwierigsten Aufgaben lösen lassen, ohne daß die Genauigkeit darunter leidet. Er wird insbesondere eine Reihe von rechnerischen und zeichnerischen Näherungsverfahren finden, die abgewandelt auch auf andere Probleme anwendbar sind . . .

*„Chemie-Ingenieur-Technik"*

---

**SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG**

*Vor kurzem erschien:*

## Physikalisches Wörterbuch

Herausgegeben von **Wilhelm H. Westphal,** Berlin. Zwei Teile in einem Band. Mit etwa 10500 Stichwörtern und 1595 Textfiguren. VII, 1628 Seiten. 1952.
Halbfranz DM 148.—

Inhaltsübersicht: Erster Teil: Stichwörter A—L. Zweiter Teil: Stichwörter M—Z. — Geschichte der Physik. — Lebensdaten der Physiker. — Tabellen. — Nachträge.

Das bewährte Physikalische Handwörterbuch von Berliner und Scheel, das zuletzt 1932 in 2. Auflage erschien, ist seit langem vergriffen. In den seitdem verflossenen 20 Jahren hat die Physik ihren seit der Jahrhundertwende eingeleiteten Fortschritt in eher noch verstärktem Tempo fortgesetzt. Insbesondere ist die Physik der Atomkerne mit ihren weltbewegenden Auswirkungen fast ganz ein Kind dieser jüngsten Zeit. Aber auch auf den meisten anderen Gebieten sind wesentliche, teilweise umwälzende neue Erkenntnisse zu verzeichnen. Als Beispiel sei nur die Physik des Weltalls genannt, der es mehr und mehr gelingt, auf dem Boden der allgemeinen Relativitätstheorie einerseits, der Atom- und Kernphysik andererseits, das Werden und den heutigen Zustand des Weltalls und der Himmelskörper zu enträtseln.

Es war deshalb nötig, ein völlig neues Werk zu schaffen, das dieser Entwicklung Rechnung trägt. Um Raum für den gewaltig angeschwollenen Stoff zu gewinnen, war eine gewisse Beschränkung auf das eigentliche Erkenntnisgut und das für die reine Forschung Wesentliche unter Verzicht auf die Behandlung rein technischer Anwendungen unumgänglich. Trotzdem hat sich die Zahl der Stichwörter mit etwa 10500 gegenüber dem Physikalischen Handwörterbuch nahezu verdoppelt.

Die Zuverlässigkeit der Darstellung wird durch die Verteilung des Stoffes auf etwa 80 Mitarbeiter gewährleistet, die als Sachverständige auf ihren Spezialgebieten bekannt sind. Ein Nachtrag bringt Ergänzungen, die noch während der Drucklegung eingingen. Ein Anhang enthält unter anderem einen kurzen Abriß der Geschichte der Physik und eine Tabelle mit den Lebensdaten von etwa 800 Physikern.

**SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG**

## Grundlagen der Atomphysik

### Eine Einführung in das Studium der Wellenmechanik und Quantenstatistik

Von Dr. phil. **Hans Adolf Bauer,** Professor an der Technischen Hochschule und der Universität in Wien. Vierte, umgearbeitete und bedeutend erweiterte Auflage. Mit 244 Textabbildungen. XX, 631 Seiten. 1951. Ganzleinen DM 45.—

Inhaltsübersicht: Die Teilchenstruktur der Materie. — Die Wellenstruktur der Materie. — Die Vereinigung des Teilchen- und Wellenbildes in der Wellen-(Quanten-)Mechanik. — Schrödingers Störungstheorie. — Relativistische Verallgemeinerung der Wellenmechanik (Diracsche Theorie). — Quantenstatistik. — Namen- und Sachverzeichnis.

... Dieses sowohl vom experimentellen, wie vom theoretischen Standpunkt geschriebene, leicht faßliche Werk, das auch die neuesten kernphysikalischen Erfahrungen berücksichtigt, ist für alle geeignet und empfehlenswert, die die für eine ernste Beschäftigung mit der Atomphysik unerläßliche Vorbildung besitzen. Das Buch geht so weit, daß es nicht nur dem Anfänger auf dem Gebiet der Atomphysik zum Studium dieses Gebietes bestens dienen kann, sondern daß es auch dem Fortgeschrittenen noch manches zu bieten vermag, was er bisher nur in spezielleren Darstellungen finden konnte.

*„Zeitschrift für angewandte Physik."*

**SPRINGER-VERLAG / WIEN**

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. W 57 275 4022 0,8 K. B./Z. 040